Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Πράξεις και ιδιότητες πραγματικών αριθμών .

1 Εισαγωγή - Οδηγίες

Οι ασκήσεις είναι κατηγοριοποιημένες ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας τους. Μία άσκηση που δεν είναι επισημασμένη είναι μία απλή εφαρμογή της θεωρίας. Οι ασκήσεις που φέρουν * απαιτούν προσοχή στις πράξεις. Οι ασκήσεις που φέρουν ** απαιτούν περισσότερη προσοχή και βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, ενώ οι ασκήσεις με *** κρύβουν μία ιδιαίτερη ιδέα ή απαιτούν σειρά συλλογισμών.

2 Θεωρία

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Rolle). *Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν:*

- *Συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[a, b]$
- *Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (a, b)
- $f(a) = f(b)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ *ώστε* $f'(\xi) = 0$.

2.1 Γεωμετρική ερμηνεία

Το θεώρημα Rolle γεωμετρικά αντιστοιχεί στην εξασφάλιση της ύπαρξης μίας εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο εσωτερικό του κλειστού διατήματος στο οποίο είναι συνεχής η συνάρτηση, παράλληλης στον άξονα $x'x$. Στην ουσία βέβαια εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας εφαπτομένης παράλληλης στην τέμνουσα $(a, f(a)), (b, f(b))$ η οποία είναι παράλληλη στον $x'x$.

Διερεύνηση του θεωρήματος εδώ

2.2 Απόδειξη

Μία απόδειξη του θεωρήματος Rolle, η οποία είναι εκτός εξεταστέας ύλης αλλά μπορεί να γίνει με τα θεωρήματα του βιβλίου, χρησιμοποιεί το Θεώρημα Fermat.

Εφόσον, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ από το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής θα λαμβάνει σε αυτό το διάστημα μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Εφόσον $f(a) = f(b)$ είτε η f είναι σταθερή, οπότε θα ισχύει ότι $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, είτε η f όχι σταθερή, οπότε λαμβάνει μία τουλάχιστον από τις μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο εσωτερικό του (a, b) για παράδειγμα στο $x_0 \in (a, b)$, οπότε από θεώρημα *Fermat* θα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, που είναι το ζητούμενο.

2.3 Παρατηρήσεις

Καμία από τις υποθέσεις του θεωρήματος *Rolle* δεν μπορεί να παραληφθεί. Όμως είναι δυνατόν να αποδειχθεί το αποτέλεσμα του θεωρήματος και για συνάρτηση ορισμένη στο (a, b), αν τα όρια $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$.

Η ύπαρξη ενός αριθμού ξ ώστε $f'(\xi) = 0$ ισοδυναμεί με το ότι έχουμε μία ρίζα της παραγώγου ή ότι η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη ξ στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2.4 Ιστορικά στοιχεία

Ο Michel Rolle [1652-1719] υπήρξε Γάλλος Μαθηματικός, ο για μεγάλο διάστημα της ζωής του ήταν αντίθετος στο νεοαναπτυσσόμενο τότε απειροστικό λογισμό και τον δέχθηκε μόνο προς το τέλος της ζωής του. Διατύπωσε το θεώρημα που φέρει το όνομά του μόνο για πολυώνυμα. Η απόδειξή του στη γενική του μορφή οφείλεται στον Ossian Bonnet. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε στα [Σχολικό], [Νεγρεπόντης].

2.5 Παραδείγματα

3 Εξάσκηση

3.1 Ασκήσεις Σχολικού βιβλίου

Από το βιβλίο στην παράγραφο 2.5 δείτε τις ασκήσεις: **Α ομάδα** 1, **Β ομάδα** 1,2,3,7.

3.2 Βασικές ασκήσεις

Άσκηση 1 (Φ15541). *Να εξεταστεί για ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις ισχύει το θεώρημα Rolle και να βρεθούν τα ξ που το ικανοποιούν.*

i. $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}, x\in[1,3]$

ii. $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, & x<1 \\ 8x-2x^2, & x\geq 1 \end{cases}, x\in[-3,3]$

iii. $f(x)=\sqrt{x}-x$

iv. $f(x)=\begin{cases} x\ln(x), & 0<x\leq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases},\ x\in[0,1].$

Άσκηση 2 (Φ11141). *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & -1\leq x<0 \\ cx^2+4x+4, & 0\leq x\leq 1 \end{cases}$ *Να βρεθούν οι* $a,b,c\in\mathbb{R}$*, ώστε η* f *να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.*

Άσκηση 3 (Φ115310). *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$*,* $a<b$*,* $m,n\in\mathbb{N}$*. Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση* f *εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο* $[a,b]$ *και να βρεθεί* $\xi\in(a,b)$ *ώστε* $f'(\xi)=0$*.*

Άσκηση 4 (Φ115521). *Αν η εξίσωση* $e^{-x}=\eta\mu(x)$ *έχει ρίζες* $a<b$*, τότε να αποδειχθεί ότι και η εξίσωση* $e^x\sigma\upsilon\nu(x)+1=0$ *έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα* (a,b)*.*

Άσκηση 5 (Φ155410). *Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση* f *και τα σημεία της γραφικής της παράστασης* $A(1,-2), B(2,3), C(3,-1)$*. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει* $\xi\in(1,3)$ *τέτοιο, ώστε* $f'(\xi)=0$*.*

Παρατήρηση 1. *Μπορούμε να δείξουμε ότι μία εξίσωση έχει μοναδική ρίζα σε ένα ανοικτό διάστημα* (a,b)*, χρησιμοποιώντας ότι, εφόσον ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle κατάλληλη συνάρτηση, τότε μπορεί να οδηγήσει σε άτοπο η ύπαρξη περισσοτέρων της μίας ρίζας.*

Παρατήρηση 2. *Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Bolzano για την απόδειξη της ύπαρξης τουλάχιστον μίας ρίζας και στη συνέχεια το θεώρημα Rolle για την απόδειξη, με άτοπο, ότι δεν υπάρχει δεύτερη ρίζα.*

Άσκηση 6 (Φ11152). *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση* $x-\frac{1}{2}\eta\mu(x)=1$ *έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα* $(-1,2)$*.*

Παρατήρηση 3. *Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Rolle περισσότερες από μία φορές για την εξασφάλιση ρίζας της δεύτερης παραγώγου μίας συνάρτησης.*

Άσκηση 7 (Φ15545)**.** *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[-a,a], a>0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f(-a)=f(a)=f(0)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (-a,a)$, ώστε να ισχύει $f''(\xi)=0$.*

Παρατήρηση 4. *Αν για μία συνάρτηση δεν μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη ρίζας της σε κάποιο διάστημα είτε με το θεώρημα bolzano είτε με την εύρεση του συνόλου τιμών της, τότε ίσως μπορεί να φανεί χρήσιμο το θεώρημα Rolle, εφόσον εφαρμοστεί σε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση g, για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=f(x)$ στο ζητούμενο διάστημα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας άσκησης είναι στο [Σχολικό] βιβλίο η άσκηση Β ομάδας 1.*

Άσκηση 8. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $2x-\frac{\pi^2}{4}\eta\mu(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.*

Παρατήρηση 5. *Με κατάλληλη εφαρμογή του θεωρήματος Rolle είναι δυνατόν να προκύψουν κατάλληλες σχέσεις που συνδέουν τη συνάρτηση f με την παράγωγό της f'.*

Άσκηση 9 (Φ15544)**.** *Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=f(3)=0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,3)$, ώστε να ισχύει $f'(\xi)+f(\xi)=0$.*

Παρατήρηση 6. *Βασικές σχέσεις με τη συνάρτηση και την παράγωγό της μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle σε* **κατάλληλη** *(βοηθητική) συνάρτηση.*

Άσκηση 10 (Φ115734)**.** *Δίνεται η συνεχής στο $[1,2]$ συνάρτηση f, η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, ώστε να ισχύει $f(2)-f(1)=3-\ln(2)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε να ισχύει η σχέση: $\xi f'(\xi)+1=2\xi^2$.*

Άσκηση 11 (Φ115735)**.** *Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,\frac{1}{2}]$, ώστε $f(0)=0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,\frac{1}{2})$, ώστε να ισχύει η σχέση: $(1-2\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.*

Άσκηση 12 (Φ11573)**.** *Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ώστε να ισχύει $f(0)=2f(1)$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.*

Άσκηση 13 (Φ115737)**.** *Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο. Αν ισχύουν $f'(0)>0, f(1)=2+f(0)$, τότε να αποδειχθούν τα εξής:*

i. *Υπαρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $f'(\xi)=4\xi$.*

ii. *Υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$, ώστε $f'(\xi_1)=5\xi_1$.*

Άσκηση 14 (Φ15551)**.** *Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b), ώστε να ισχύει $\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(b)}{g(b)}$, τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε να ισχύει $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.*

Άσκηση 15 (Φ15553)**.** *Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη με $f(1)=1$. Να αποδειχθεί ότι υπαρχει $\xi>0$ τέτοιο, ώστε: $\xi f'(\xi)+f(\xi)=2\xi$.*

Άσκηση 16 (Φ15561)**.** *Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, με $f'(x)\neq 0, \forall x \in [a,b]$, ώστε να ισχύει $f(a)f'(b)=f(b)f'(a)$. Να αποδειχθεί ότι:*

i. *Η f είναι αντιστρέψιμη.*

ii. *Υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi)f''(\xi)=(f'(\xi))^2$.*

3.3 Επιπλέον εξάσκηση

Άσκηση 17 (Φ11525). *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \eta\mu(x), & x \leq 0 \\ ax^2 + bx, & x > 0 \end{cases}$

i. *Να βρεθούν οι τιμές των* $a, b \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες η* f *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα* $[-\pi, 1]$.

ii. *Να βρεθούν όλες οι τιμές* $\xi \in (-\pi, 1)$ *για τις οποίες ισχύει* $f'(\xi) = 0$.

iii. *Να ερμηνευτεί γεωμετρικά το αποτέλεσμα.*

Άσκηση 18 (Φ11537). *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = (x^2 + x)\sigma\upsilon\nu(x)$.

i. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση* $f(x) = 0$ *έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα* $(-2, 1), (1, 2)$.

ii. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση* $(2x + 1)\sigma\upsilon\nu(x) = (x^2 + x)\eta\mu(x)$ *έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα* $(-2, 2)$.

Άσκηση 19 ([Μαυρογιάννης] 722). *Να αποδειχθεί ότι αν δύο συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα* $[a, b]$ *και δεν έχουν παράλληλες εφαπτομένες, τότε θα έχουν τουλάχιστον μία κοινή εφαπτομένη.*

Άσκηση 20 (Φ115633). *Δίνεται η συνάρτηση* f, *η οποία είναι παραγωγίσιμη στο* $[1, 2]$ *και ισχύει ότι* $f(2) - f(1) = \ln(2)$. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα* $\xi \in (1, 2)$, *ώστε:* $f'(\xi) = \frac{2\xi^2 - 3\xi + 1}{\xi}$.

Άσκηση 21 ([Μαυρογιάννης], 723). *Θεωρούμε στο επίπεδο τα σημεία* $M(x, y)$ *οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν τη σχέση:* $(y + 1)^3 = x^2$.

i. *Να αποδειχθεί ότι η παραπάνω σχέση ορίζει μία συνάρτηση* $y = f(x)$, *της οποίας να βρεθεί ο τύπος.*

ii. *Να βρεθεί σε ποια σημεία παραγωγίζεται η* f.

iii. *Στα άκρα κάθε διαστήματος της μορφής* $[-a, a]$ *η* f *παίρνει ίσες τιμές. Εντούτοις δεν έχει εφαπτομένη παράλληλη στον* $x'x$. *Είναι αληθές αυτό; Γιατί; Έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα Rolle;*

Άσκηση 22 (Φ15579). *Δίνεται η συνάρτηση* f, *δύο φορές παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$, *ώστε* $f''(x) \neq 0$. *Να αποδειχθεί ότι η* $f(x) = 0$ *έχει το πολύ δύο ρίζες.*

Άσκηση 23 (Φ15563). *Δίνεται η συνάρτηση* f *παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$, *ώστε να ισχύει* $f(a) = f(b) = 0$ *και* $f''(x) \neq 0$. *Να αποδειχθεί ότι:*

i. *Υπάρχει μοναδικό* $\xi \in (a, b)$, *ώστε* $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

ii. *Υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της* f *στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.*

Άσκηση 24 (Φ155715). *Δίνονται οι συναρτήσεις* $f(x) = x, g(x) = \eta\mu(2x)$. *Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται σε μοναδικό σημείο* $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Άσκηση 25 (Φ15577). *Να εξεταστεί αν υπάρχει* $a \in \mathbb{R}$, *ώστε η εξίσωση* $x^4 + 5x + \ln(x) + a = 0$ *να έχει δύο ρίζες στο* $(1, e)$.

Άσκηση 26. *Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση* f *για την οποία ισχύει η σχέση* $f^2(e^x) + 1 \leq 2f(ex - x + 1)$. *Να αποδειχθεί όιτ υπάρχει* $\xi \in (1, e)$ *τέτοιο, ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της* C_f *στο σημείο* $M(\xi, f(\xi))$ *να είναι παράλληλη στον άξονα* $x'x$.

Πρότυπο Γενικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

3.4 Θέματα Εξετάσεων

Άσκηση 27. *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = (x-2)\ln(x) + x - 3,\ x > 0$.

i. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση* $f(x) = 0$ *έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.*

ii. *Αν* x_1, x_2 *είναι οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος με* $x_1 < x_2$ *να αποδειχθεί ότι υπάρχει* $\xi \in (x_1, x_2)$, *ώστε* $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

iii. *Να αποδειχθεί ότι η εφαπτόμενη ευθεία της* C_f *στο σημείο* $M(\xi, f(\xi))$ *διέρχεται από την αρχή των αξόνων.*

Άσκηση 28. *Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:* $f'(0) = 2f(0), f'(2) = 2f(2) + 12e^4$. *Να αποδειχθεί ότι:*

i. *Η συνάρτηση* $g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα* $[0,2]$.

ii. *υπάρχει τουλάχιστον ένα* $\xi \in (0,2)$ *ώστε να ισχύει* $f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$.

Άσκηση 29. *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$. *Να αποδειχθεί ότι:*

i. *Η εξίσωση* $f(x) = 0$ *έχει ακριβώς δύο ρίζες τις* $x_1 = 0, x_2 = 1$.

ii. *υπάρχει ακριβώς ένα* $x_0 \in \mathbb{R}$ *τέτοιο, ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της* C_f *στο σημείο* $A(x_0, f(x_0))$ *να είναι παράλληλη στον άξονα* $x'x$.

Άσκηση 30. *Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί τις σχέσεις:* $f(1) = f'(0)$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+\eta\mu(x)}{x^2-x} = 2$ *και* $f''(x) > -2, \forall x \in \mathbb{R}$.

i. *Να αποδειχθεί ότι* $f(0) = 0, f(1) = -3$.

ii. *Να βρεθεί η τιμή του* $a \in \mathbb{R}$ *για την οποία η συνάρτηση* $g(x) = f(x) = a(x+1)^2$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα* $[0,1]$.

iii. *Για* $a = 1$ *να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο* $\xi \in (0,1)$ *τέτοιο, ώστε:* $f'(\xi) = -2(\xi + 1)$.

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

4 Βιβλιογραφία

Ἀναφορὲς

[Crowe] *Crowe M.J.* A History of Vector Analysis, *University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1967.*

[Gel'fand] *Gel'fand I.M., Glagoleva E.G., Shnol E.E.* Functions and Graphs, *Birkhäuser, Boston, 1990.*

[Markus] *Markus Marvin* A Survey of Finite Mathematics, *Dover Publications Inc., New York, 1969.*

[Marsden] *Marsden J., Tromba A.* Διανυσματικός Λογισμός, *Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 4η Έκδοση, Ηράκλειο 2000.*

[Wolfram] *Stover, Christopher and Weisstein, Eric W.* "Function." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. , *http://mathworld.wolfram.com/Function.html, 2015.*

[Σχολικό] *Ανδρεαδάκης,Σ., Κατσαργύρης,Β., Μέτης,Σ., Μπρουχούτας,Κ.,Παπασταυρίδης,Σ., Πολύζος,Γ.* Μαθηματικά Γ΄τάξης Γενικού λυκείου Θετική και τεχνολογικη κατεύθυνση, *ΟΕΔΒ, 2007. Το σχολικό βιβλίο στην έκδοση που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το κείμενο βρίσκεται και στη διεύθυνση αυτή.*

[Μαυρογιάννης] *Μαυρογιάννης Ν.* Άλγεβρα Α΄λυκείου Σημειώσεις, *2014-2015.*

[Μαυρογιάννης] *Μαυρογιάννης Ν.* Μαθηματικά Γ΄λυκείου Ασκήσεις, *2014-2015.*

[Μπάρλας] *Μπάρλας Α.* Μαθηματικά Γ΄λυκείου Τόμος Ι, *Ελληνοεκδοτική, 2013.*

[Νεγρεπόντης] *Νεγρεπόντης,Σ., Γιωτόπουλος,Σ., Γιαννακούλιας,Ε.* Απειροστικός Λογισμός, *Αίθρα, 1995.*

[Πούλος 2009] *Πούλος Α.* εικασίες και αντιπαραδείγματα, *Μαυρίδη, 2009.*

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr