Μέρος ΙΙ
Β Λυκείου

7 Συστήματα

7.1 Γραμμικά συστήματα

Γενική παρατήρηση: Σε όλα τα παρακάτω συστήματα, όπου εμφανίζονται μεταβλητές a, b, c, d δεν είναι όλες ή μίας εξίσωσης και οι δύο μηδέν.

Άσκηση 55. *Να λυθούν τα συστήματα:* $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ x-5y &= 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x-9y &= 11 \\ -2x+3y &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x+15y &= 30 \\ x+\frac{3}{2}y &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+y &= 20 \\ 30x+5y &= 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x+y-1)-2(y+1) &= 2+x \\ 3(x+y)-y &= 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y &= 2 \\ |x+y| &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(3y-2)=0 \\ (5x+2)(2y-3=0 \end{cases}$$

Άσκηση 56. *Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών :*

$$\begin{cases} 5x+2y &= 7 \\ 3x-2y &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x+1 &= y \\ 3x-2 &= -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{5}-1)x+y &= 1 \\ -x+(\sqrt{5}+1)y &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{2}+2(x+y) &= 14 \\ x-y+\frac{2y+1}{5} &= 2 \end{cases}$$

Άσκηση 57. *Να γίνει διερεύνηση και επίλυση των συστημάτων:*

$$\begin{cases} kx+4y &= 4 \\ x+ky &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k-1)^2x+(k^2-1)y &= (k+1)^2 \\ (2k-1)x+(k+1)y &= k^2-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k-1)x+2ky+2 &= 0 \\ 2kx+(k-1)y+1-k &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k^2+m^2)x+(k^2-m^2)y &= k^2 \\ (k+m)x+(k-m)y &= k \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx-4y+k &= 4 \\ x+2(k+3)y-1 &= 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} &= \frac{k}{m-n} \\ \frac{x+n}{y+m} &= \frac{k+m}{k+n} \end{cases}$$

Άσκηση 58. *Να λυθούν τα συστήματα:*

$$\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{3}{y} &= 2 \\ \frac{3}{x}+\frac{1}{y} &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{12}{2x+y-1}-\frac{4}{2x-y+3} &= 5 \\ \frac{1}{2x+y-1}-\frac{1}{2x-y+3} &= \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+1|+3|y+3| &= 2 \\ 3|x+1|-2|y+3| &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+1}-\sqrt{y-1} &= 2 \\ -\sqrt{x+1}+2\sqrt{y-1} &= 1 \end{cases}$$

Άσκηση 59. *Να βρεθεί το $k \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει μοναδική λύση :*

$$\begin{cases} (k-2)x+3y &= k \\ kx+(3-k)y &= k-1 \end{cases}$$

Άσκηση 60. *Να βρεθεί ο $k \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (a, b), ώστε $a+b=5$.*

$$\begin{cases} (k+1)x-y+k &= 1 \\ (3k+1)x+(k-3)y+1 &= k^2 \end{cases}$$

Άσκηση 61. *Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{ax+1}{bx^2}$. Να βρεθούν οι $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0), B(1,2)$.*

Άσκηση 62. *Έστω οι ευθείες:*

$$k_1 : x-y=a, \ k_2 : ax+y=2$$

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο, τις συντεταγμένες του οποίου να βρείτε ως συνάρτηση του a.

Άσκηση 63. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:*

$$x^2-y^2-4x+2y+3=0$$

παριστάνει δύο ευθείες των οποίων να βρεθεί το σημείο τομής.

Άσκηση 64. *Έστω D_x, D_y, D οι ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος (Σ) δύο αγνώστων, για τις οποίες ισχύουν: $3D_x - D_y = 13$, $3D_y - 2D_x = -4$.Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος.*

Άσκηση 65. *Έστω D_x, D_y, D οι ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος (Σ) με δύο αγνώστους, για τις οποίες ισχύουν: $D^2+(D_x+2)^2+D_y^2=0$. Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων του συστήματος.*

Άσκηση 66. *Έστω D_x, D_y, D οι ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος (Σ) με δύο αγνώστους, για τις οποίες ισχύουν: $|D-2| > 2$. Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων του συστήματος.*

Άσκηση 67. *Έστω D_x, D_y, D οι ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος (Σ) με δύο αγνώστους, για τις οποίες ισχύουν: $|D+2| - |D_x - 2| + |D_y + 2| = 0$. Να βρεθούν οι λύσεις"του συστήματος.*

Άσκηση 68. *Έστω D_x, D_y, D οι ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος (Σ) με δύο αγνώστους, για τις οποίες ισχύουν: $D_x^2 + D_y^2 + D^2 = D_x D_y + D D_y + D D_x$. Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων του συστήματος. Να δείξετε ότι όταν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) τότε $x + y = 2$.*

Άσκηση 69. *Να βρεθούν οι λύσεις των γραμμικών συστημάτων δύο αγνώστων, όπου D_x, D_y, D οι ορίζουσές τους σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :*

1. $D_x - D_y = 5D,\ 2D_x + D_y = 4D$ *με μοναδική λύση.*
2. $D_x^2 + D_y^2 + 4D^2 - 4DD_x = 0$ *με μοναδική λύση.*
3. $D^2 + 4D_x^2 + 9D_y^2 - 6D + 12D_x D_y + 9 = 0$
4. $D_x^2 + D_y^2 + \frac{9}{4}D^2 + D_x - 3D_y - 3/2D \leq -\frac{11}{4}$
5. $3D_y + D_x = D,\ 3D - D_y = D_x$
6. $D_x + D_y = 0,\ D \neq 0,\ D_x - D_y = 2D$
7. $D_x^2 + D_y^2 + D^2 + 6D_x - 10D_y + 8D + 50 = 0$

Άσκηση 70. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 4x & y \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 23 \\ \begin{vmatrix} 3x & -y \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -13 \end{cases}$$

Άσκηση 71. *Τρεις κύκλοι με κέντρα Κ, Λ, Μ εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο. Αν οι αποστάσεις των κέντρων τους ανά δύο είναι $7, 8, 9$ να βρεθούν οι ακτίνες τους.*

Άσκηση 72. *Αν το σημείο $K(-1, 2)$ είναι σημείο ελαχίστου για μία παραβολή της μορφής: $y = ax^2 + bx + c$, να βρεθούν οι $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Άσκηση 73. *Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ το σύστημα* $\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ ax - by = a^2 + b^2 \end{cases}$ *για τις διάφορες τιμές των πραγματικών a, b.*

Άσκηση 74. *Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 20. Αν αυξήσουμε το μήκος κάθε πλευράς του κατά 1, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδόν μεγαλύτερο κατά 11 από το αρχικό. Να βρεθούν οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου.*

Άσκηση 75. *Αν το ψηφίο των δεκάδων ενός διψήφιου αριθμού είναι μικρότερο κατά 3 από το ψηφίο των μονάδων του και το άθροισμα των ψηφίων είναι ίσο με 7 να βρεθεί ο διψήφιος αριθμός.*

Άσκηση 76. *Να χωρισθεί ο αριθμός 70 σε δυο μέρη που θα έχουν γινόμενο 441.*

Άσκηση 77. *Να λυθεί το σύστημα* $\begin{cases} 3x = 4y \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

Άσκηση 78. *Δίνονται οι ευθείες: $k_1 : x + y = 1,\ k_2 : y = ax + 1$. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες μεταξύ τους. Στη συνέχεια για $a = 1$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις k_1, k_2 και τον άξονα $X'X$.*

Άσκηση 79. *Σε έναν τριψήφιο αριθμό ισχύει ότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι 15, ενώ η εναλλαγή του 1ου με το τελευταίο ψηφίο του δίνει έναν αριθμό μεγαλύτερο κατά 594 και τέλος το πρώτο είναι μικρότερο του τρίτου ψηφίου κατά 6. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.*

7.2 Μη γραμμικά συστήματα

Άσκηση 80. *Να λυθούν τα μη γραμμικά συστήματα:*

(1) $$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= 2 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} &= 16 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x^3 - y^3 &= 7 \\ x &= y + 1 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} 2(x+y) - xy &= 4 \\ -3(x+y) + 5xy &= 1 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 34 \\ xy &= -15 \end{cases}$$

(5) $$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} &= \frac{5}{4} \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} (x+y^2) - 2(x+y) &= 15 \\ xy &= 6 \end{cases}$$

(7)
$$\begin{cases} 2x - 3y &= 1 \\ 2x^2 - 5xy + y^2 + 10x + 12y &= 100 \end{cases}$$

(8) $$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} &= \frac{9}{20} \\ x^2 - y^2 &= 9 \end{cases}$$

(9) $$\begin{cases} x + y &= 6 \\ \frac{1+x^2+x}{1+y^2+y} &= 3 \end{cases}$$

(10) $$\begin{cases} x^3 + y^3 &= 9 \\ x + y &= 3 \end{cases}$$

Άσκηση 81. *Να βρεθούν τα σημεία τομής των παραβολών $x^2 = y$ και $y^2 = x$.*

Άσκηση 82. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 &= 28 \\ xy(x+y) &= 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} &= \\ &= \end{cases}$$

Άσκηση 83. *Να βρεθούν τα σημεία τομής της υπερβολής $xy = 27$ και της ευθείας $x = 3y$.*

Άσκηση 84.

Άσκηση 85. *Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από δύο σημεία τομής(ένα με θετική και ένα με αρνητική τετμημένη) του κύκλου $x^2+y^2 = 6$ και της υπερβολής $x^2-y^2 = 2$.*

Άσκηση 86. *Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων του συστήματος για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} x^2 &= 2y \\ y - x &= k \end{cases}$$

Άσκηση 87. *Αν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να βρεθούν.*

Άσκηση 88 (*)**.** *Να βρεθεί ποιο ορθογώνιο με εμβαδόν 49 έχει την ελάχιστη περίμετρο και πόσο είναι αυτή.*