Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Το Θεωρημα Μεσης Τιμης του Διαφορικου Λογισμου .

1 Εισαγωγή - Οδηγίες

Οι ασκήσεις είναι κατηγοριοποιημένες ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας τους. Μία άσκηση που δεν είναι επισημασμένη είναι μία απλή εφαρμογή της θεωρίας. Οι ασκήσεις που φέρουν * απαιτούν προσοχή στις πράξεις. Οι ασκήσεις που φέρουν ** απαιτούν περισσότερη προσοχή και βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, ενώ οι ασκήσεις με *** κρύβουν μία ιδιαίτερη ιδέα ή απαιτούν σειρά συλλογισμών.

2 Θεωρία

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ»*. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν:*

- *Συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[a, b]$
- *Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (a, b)

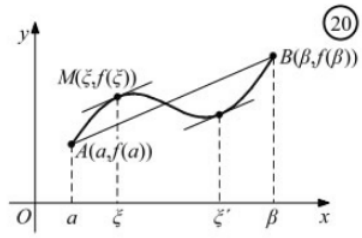
τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ *ώστε* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2.1 Γεωμετρική ερμηνεία

Το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού γεωμετρικά αντιστοιχεί στην εξασφάλιση της ύπαρξης μίας εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο εσωτερικό του κλειστού διατήματος στο οποίο είναι συνεχής η συνάρτηση, παράλληλης στην τέμνουσα $(a, f(a)), (b, f(b))$.

2.1.1 [Σχολικό]

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ∈ (α,β) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.



Διερεύνηση του θεωρήματος εδώ

2.2 Απόδειξη

Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να γίνει με τη χρήση του θεωρήματος *Rolle*, χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση.

Το θεώρημα Μ.Τ. αποτελεί μία γενίκευση του θεωρήματος *Rolle*, όπως το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών αποτελεί μία γενίκευση του θεωρήματος *Bolzano*.

Απόδειξη[Εκτός εξεταστέας ύλης] Για την εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης σκεφτόμαστε ότι η τέμνουσα ΑΒ πρέπει να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, οπότε θα πρέπει να περιστραφεί κατάλληλα ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης να γίνει 0 και οι τιμές στα άκρα να γίνουν ίσες.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x,\ x \in [a,b]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), εφόσον η συνάρτηση f έχει τις αντίστοιχες ιδιότητες.

Επιπλέον ισχύει ότι $g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b-f(a)a-af(b)+af(a)}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$ και $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b-f(b)a-bf(b)+bf(a)}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = g(a)$.

Συνεπώς εφαρμόζεται το θεώρημα *Rolle* για την g στο $[a,b]$ και υπαρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο.

Για να διερευνηθεί η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης εφαρμογής του θεωρήματος *Rolle* μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δραστηριότητα εδώ.

Η χρήση της βοηθητικής συνάρτησης $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ προτιμάται από πολλούς συγγραφείς διότι έχει την γεωμετρική ερμηνεία που προκύπτει στην εφαρμογή παραπάνω.

2.3 Παρατηρήσεις

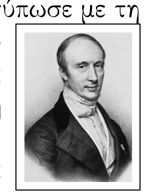
Καμία από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής δεν μπορεί να παραληφθεί. Τόσο η συνέχεια όσο και η παραγωγισιμότητα στο ανοικτό διάστημα είναι αναγκαίες όπως φαίνεται και από την ερώτηση 2 στη δραστηριότητα εδώ

Ο λόγος $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ αποτελεί τη μέση τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα $[a,b]$. Η **φυσική ερμηνεία** του θεωρήματος Μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού είναι ακριβώς ότι υπάρχει εσωτερική θέση ξ του διαστήμτος $[a,b]$ στην οποία ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους $y = f(x)$ γίνεται ίση με τη μέση τιμή του στο $[a,b]$.

2.4 Ιστορικά στοιχεία

Το θεώρημα μέσης τιμής οφείλεται στον Joseph Louis Lagrange, ο οποίος το δημοσίευσε στο έργο του Theorie des fonctions Analytiques το 1797.

Ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) ήταν αυτός που κατανόησε σε βάθος την κεντρική σημαία του θεωρήματος μέσης τιμής το 1823 και το διατύπωσε με τη μορφή που το γνωρίζουμε σήμερα. Ο ίδιος απέδειξε και το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής που αναφέρεται στις ασκήσεις παρακάτω.Όπως θα δούμε στη συνέχεια οι εφαρμογές του θεωρήματος μέσης τιμής στη μελέτη της μονοτονίας των συναρτήσεων είναι σημαντικές και συνεχίζονται τόσο στη μελέτη των τοπικών ακροτάτων και της κυρτότητας μίας συνάρτησης, αλλά και αργότερα στην ολοκλήρωση των συναρτήσεων.



Augustin-Louis Cauchy 1789-1857

2.5 Παραδείγματα

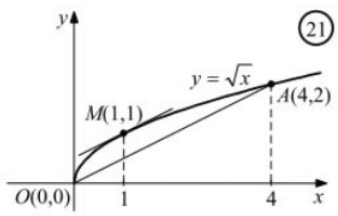
Από τα αναφερόμενα στο [Σχολικό] βιβλίο έχουμε:

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x},\quad x \in [0,4].$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,4] και παραγωγίσιμη στο (0,4), με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει ένας αριθμός ξ ∈ (0,4) τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{1}{2}.$$



Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε :

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\xi} = 1 \Leftrightarrow \xi = 1.$$

Πρότυπο Γενικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

2. Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση f(x) = αx² + βx + γ, α ≠ 0 και για οποιοδήποτε διάστημα [x₁,x₂], ο αριθμός x₀ ∈ (x₁, x₂), που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, είναι το κέντρο του διαστήματος [x₁, x₂], δηλαδή είναι $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Είναι όμως :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma - \alpha x_1^2 - \beta x_1 - \gamma}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha(x_2-x_1)(x_2+x_1) + \beta(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$
$$= \frac{(x_2-x_1)[\alpha(x_1+x_2)+\beta]}{x_2-x_1} = \alpha(x_1+x_2)+\beta .$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται :

$$2\alpha x_0 + \beta = \alpha(x_1+x_2)+\beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

3. Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Να αποδειχθεί ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν 80 χιλιόμετρα την ώρα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x = S(t)$, $t \in [0, 2{,}5]$ η συνάρτηση θέσης του κινητού. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $t_0 \in [0, 2{,}5]$, τέτοια ώστε $\upsilon(t_0) = S'(t_0) = 80$.
Η συνάρτηση S είναι συνεχής στο [0, 2,5] και παραγωγίσιμη στο (0, 2,5). Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $t_0 \in (0, 2{,}5)$ τέτοιο, ώστε

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0) = \frac{S(2{,}5) - S(0)}{2{,}5} = \frac{200-0}{2{,}5} = 80 \text{ χιλιόμετρα την ώρα.}$$

3 Εξάσκηση

3.1 Ασκήσεις Σχολικού βιβλίου

Από το βιβλίο στην παράγραφο 2.5 δείτε τις ασκήσεις: **Α ομάδα** 2 αφορά σε εφαρμογές του θεωρήματος και εύρεση των ξ. **Α ομάδα** 3 αφορά εφαρμογή του θεωρήματος για απόδειξη ανισοτήτων.

Β ομάδα 4,5,6.

3.2 Βασικές ασκήσεις

Άσκηση 1. *Να εξεταστεί ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα που δίνεται κάθε φορά και να βρεθούν τα $\xi \in (a,b)$ για τα οποία ισχύει.*

i. $f(x) = |x^2 - x|, x \in [-1,1]$

ii. $f(x) = 2x^2 + 1, x \in [1,3]$

iii. $f(x) = \frac{1}{x} - x^2, x \in [1,2]$

iv. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x < 0 \\ -x^2 + 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

v. $f(x) = x + \ln(x), x \in [1, e]$

Άσκηση 2 (Φ15582). *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \le 1 \\ x^3 - ax + b, & x > 1 \end{cases}$

i. *Να βρεθούν οι αριθμοί* $a, b \in \mathbb{R}$, *ώστε να εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα* $[-1, 2]$.

ii. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο* $M(\xi, f(\xi)), \xi \in (-1, 2)$ *στο οποίο η εφαπτομένη στη* C_f *είναι παράλληλη στην ευθεία* $y = 2x + 3$ *και στη συνέχεια να βρεθεί το* M.

Άσκηση 3 *Αν* f *συνεχής συνάρτηση στο* $[a, b]$ *και παραγωγίσιμη στο* (a, b), *ώστε* $f(a) = b, f(b) = a$, *να αποδειχθεί ότι υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *ώστε η εφαπτομένη στη* C_f *στο* $(\xi, f(\xi))$ *είναι κάθετη στην* $y = x$.

Άσκηση 4 *Δίνεται η συνάρτηση* f, *παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$, *ώστε* $f^2(1) - f^2(0) > 1$ *και* $g(x) = f^2(x) - x$. *Να αποδειχθεί ότι:*

i. *υπάρχει* $x_0 \in (0, 1)$ *ώστε* $g'(x_0) > 0$.

ii. $f(x_0)f'(x_0) > \frac{1}{2}$.

Άσκηση 5 (Φ115740). *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$. *Να αποδειχθεί ότι:*

i. *Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο* $[e, e^2]$.

ii. *Υπάρχει τουλάχιστον ένα* $\xi \in (e, e^2)$,*ώστε* $f'(\xi) < 0$.

iii. $f(\xi) > \frac{1}{\xi}$.

Παρατήρηση 1. *Η εφαρμογή του ΘΜΤ σε ένα διάστημα* $[a, b]$, *όπως και του θεωρήματος Rolle, αποδεικνύει την ύπαρξη ενός αριθμού* $\xi \in (a, b)$ *τέτοιου, ώστε* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a)}$. *Αν δούμε την ύπαρξη του* $\xi \in (a, b) \Leftrightarrow a < \xi < b$, *τότε με χρήση ιδιοτήτων μονοτονίας της παραγώγου μπορεί να οδηγηθούμε σε απόδειξη ανισοτήτων. Δείτε σχετικά και την άσκηση Α ομάδας 3 στο [Σχολικό] βιβλίο.*

Άσκηση 6 (Φ11539). *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση* f *στο διάστημα* $[1, 3]$, *παραγωγίσιμη στο* $(1, 3)$, *ώστε* $f(1) = 1,\ 1 < f'(x) < 3, \forall x \in (1, 3)$. *Να αποδειχθεί ότι* $3 < f(3) < 7$.

Άσκηση 7. *Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση* $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2(x)$ *εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα* $[a, b]$ *και στη συνέχεια να αποδειχθεί η ανισότητα* $|\sigma\upsilon\nu^2(a) - \sigma\upsilon\nu^2(b)| \le |a - b|$.

Άσκηση 8 (Φ11538). *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση* f *στο* $[a, b]$, *η οποία είναι παραγωγίσιμη στο* (a, b) *με* $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. *Να αποδειχθεί ότι:*

i. *Για τη συνάρτηση* $g(x) = \ln(f(x))$ *εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα* $[a, b]$.

ii. *Υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *τέτοιο, ώστε:* $f(a) = f(b)e^{(a-b)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

Άσκηση 9 (Φ15587). *Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση* f *για την οποία ισχύουν οι σχέσεις* $f(a) = 2b + 6a,\ f(b) = 5b + 3a$. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *τέτοιο, ώστε* $f'(\xi) = 3$.

Παρατήρηση 2. *Σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να διευκολύνει η χρήση του ΘΜΤ σε περισσότερα από ένα διαστήματα. Γενικότερα, όπου βλέπουμε σχέσεις με λόγους μεταβολής είναι πιθανό να «κρύβουν» πίσω τους κάποιο ΘΜΤ.*

Άσκηση 10 (Φ115520). *Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση* f *στο* $[a, b]$ *για την οποία ισχύει* $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ *για κάποιο* $c \in (a, b)$. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει* $x_0 \in (a, b)$ *τέτοιο, ώστε* $f''(x_0) = 0$. *Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δραστηριότητα εδώ.*

Πρότυπο Γενικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

Άσκηση 11 (Φ115418)**.** *Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,2]$ για την οποία ισχύει $f(2) = \frac{f(0)+f(2)}{2}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$.*

Παρατήρηση 3. *Απόδειξη ανισοτήτων.* *Η απόδειξη διαφόρων μορφών ανισοτήτων είναι εφικτή με τη χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής σε κατάλληλο διάστημα για κατάλληλη συνάρτηση. Εντούτοις, δεν είναι ο ευκολότερος τρόπος για να γίνει αυτό. Συχνά η μονοτονία μίας συνάρτησης ή η κυρτότητά της οδηγούν σε ευκολότερες λύσεις.*

Άσκηση 12. *Να αποδειχθούν οι ανισότητες:*

i. $e < \frac{3-e}{\ln(3)-1} < 3$.

ii. $\frac{1}{3} < \ln(1,5) < \frac{1}{2}$.

iii. $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$

iv. $\frac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x, \forall x > -1, x \neq 0$.

Άσκηση 13 (Φ15591)**.** *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), ώστε $f(a) > f(b)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) < 0$.*

Άσκηση 14. *Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την f' να είναι 1-1. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της C_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτήν.*

Άσκηση 15 (Φ15592)**.** *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f και γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) > 0$.*

Άσκηση 16 (Φ15593)**.** *Δίνεται η παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με f' γνησίως φθίνουσα. Να αποδειχθεί ότι α) $f'(4) < f(4) - f(3) < f'(3)$ και β) $f(7) < f'(6) + f(6)$.*

Παρατήρηση 4. *Μεταβλητό διάστημα.* *Σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί να εφαρμοστεί το ΘΜΤ σε μεταβλητό διάστημα, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις.*

Άσκηση 17 (Φ155910)**.** *Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln(x), x > 0$. Να αποδειχθεί ότι:*

i. f' *γνησίως αύξουσα.*

ii. $f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \forall x > 0$.

Άσκηση 18. *Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.*

i. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το ΘΜΤ για την f.

ii. Να αποδείξετε ότι $x + 1 \leq e^x \leq xe^x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 5. *Σε πολλές περιπτώσεις είναι δυνατόν να απαιτείται η εφαρμογή του ΘΜΤ σε περισσότερα από ένα κατάλληλα διαστήματα σε συνδυασμό, ή χωρίς, με άλλα θεωρήματα.*

Άσκηση 19 (Φ15602)**.** *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[-a,a]$, η οποία είναι και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-a,a)$, ώστε $f(-a) = 2f(0) - f(a)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (-a,a)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.*

Άσκηση 20 (Φ15604)**.** *Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας έχει τρία συνευθειακά σημεία. Να αποδείξετε ότι:*

i. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία στη C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες.

ii. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

Άσκηση 21 (Φ116056). *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[-2,2]$ που είναι και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$. Αν $f(-2)=-4, f(2)=4$ να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο $\xi_1,\xi_2 \in (-2,2)$, ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=1$.*

Άσκηση 22. *Να λυθεί η εξίσωση*

$$6^x + 10^x = 3^x + 13^x$$

3.2.1 Προβλήματα

Άσκηση 23 *Ένας αθλητής διανύει τα 100 μέτρα σε 10 δευτερόλεπτα. Να αποδειχθεί ότι:*

i. *κάποια χρονική στιγμή στη διαδρομή ο αθλητής θα έχει ταχύτητα $10m/sec$.*

ii. *υπάρχει χρονική στιγμή $t_1 \in (0,10)$, κατά την οποία η ταχύτητα του αθλητή είναι $v(t_1)=2t_1$.*

3.3 Επιπλέον εξάσκηση

Άσκηση 24 (Φ115312). *Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\epsilon\phi(x), x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, με $a<b$. Να αποδειχθεί ότι εφαρμόζεται το ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[a,b]$ και ισχύει ότι*

$$\frac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2(b)} < \epsilon\phi(a)-\epsilon\phi(b) < \frac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2(a)}$$

Άσκηση 25. *Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με γνησίως αύξουσα παράγωγο f'. Να αποδειχθεί ότι $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$.*

Άσκηση 26. *Δίνεται η συνεχής στο $[a,b]$ συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), για την οποία ισχύουν $f(a)<0, f(b)=f'(b)=0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$,ώστε $f''(\xi)<0$.*

Άσκηση 27 (Φ116059). *Δίνεται η συνάρτηση f γνησίως μονότονη, παραγωγίσιμη, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Να αποδειχθεί ότι:*

i. *Η εξίσωση: $\frac{2}{f(x)}=\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(b)}$ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(a,b)$.*

ii. *Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)>0$.*

Άσκηση 28 (Φ155950). *Να αποδειχθεί ότι:*

i. $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x, \forall x>-1, x\neq 0$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^3}=0$.

Άσκηση 29 (Φ116164). *Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\frac{f(1)+f(3)}{2}=f(2)+1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)>1$.*

Άσκηση 30 *Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, ώστε $f''(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι :*

i. *f' είναι 1-1.*

ii. *η εξίσωση $f(3x)-f(2x)=f(2x)-f(x)$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.*

Άσκηση 31 (***Θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy). *Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[a,b]$. Αν επιπλέον η παράγωγος της g δε μηδενίζεται και $g(a)\neq g(b)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(a,b)$ τέτοιο, ώστε $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Δείτε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος εδώ.*

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

3.4 Θέματα Εξετάσεων

Άσκηση 32. *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$

i. *Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια.*

ii. *Να εξεταστεί αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα* $[-1, 1]$.

iii. *Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο* $A(0, \frac{5}{4})$.

Άσκηση 33. *Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 2, f(1) = 4$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$.*

Άσκηση 34. *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[a,b]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (a,b), ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Αν υπάρχουν $k, m \in (a,b)$ ώστε $f(k) \cdot f(m) < 0$, τότε να αποδειχθεί ότι:*

i. *η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a,b).*

ii. *υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) > 0,\ f''(\xi_2) < 0$.*

iii. *υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.*

Άσκηση 35. *Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0) = 3, f(1) = 8$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 5$.*

Άσκηση 36. *Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln(x), x > 0$. Να αποδειχθεί ότι $f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \forall x > 0$.*

Άσκηση 37. *Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x(x + \sqrt{x^2+1})$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2), \xi_2 \in (2,3), \xi \in (1,3)$ τέτοια, ώστε*

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2f'(\xi)$$

Άσκηση 38. *Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Να αποδειχθεί ότι*

$$f'(x) > \frac{f(x) - 2}{x - 1}, \forall x > 1$$

4 Βιβλιογραφία

Ἀναφορὲς

[Crowe] Crowe M.J. A History of Vector Analysis, *University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1967.*

[Gel'fand] Gel'fand I.M., Glagoleva E.G., Shnol E.E. Functions and Graphs, *Birkhäuser, Boston, 1990.*

[Markus] Markus Marvin A Survey of Finite Mathematics, *Dover Publications Inc., New York, 1969.*

[Marsden] Marsden J., Tromba A. Διανυσματικός Λογισμός, *Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 4η Έκδοση, Ηράκλειο 2000.*

[Wolfram] Stover, Christopher and Weisstein, Eric W. "Function." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. , *http://mathworld.wolfram.com/Function.html, 2015.*

[Σχολικό] Ανδρεαδάκης,Σ., Κατσαργύρης,Β., Μέτης,Σ., Μπρουχούτας,Κ.,Παπασταυρίδης,Σ., Πολύζος,Γ. Μαθηματικά Γ΄τάξης Γενικού λυκείου Θετική και τεχνολογικη κατεύθυνση, *ΟΕΔΒ, 2007. Το σχολικό βιβλίο στην έκδοση που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το κείμενο βρίσκεται και στη διεύθυνση αυτή.*

[Μαυρίδης] Μαυρίδης, Γ. Μαθηματικά Γ΄λυκείου, *2018.*

[Μαυρογιάννης] Μαυρογιάννης Ν. Άλγεβρα Α΄λυκείου Σημειώσεις, *2014-2015.*

[Μαυρογιάννης] Μαυρογιάννης Ν. Μαθηματικά Γ΄λυκείου Ασκήσεις, *2014-2015.*

[Μπάρλας] Μπάρλας Α. Μαθηματικά Γ΄λυκείου Τόμος Ι, *Ελληνοεκδοτική, 2013.*

[Νεγρεπόντης] Νεγρεπόντης,Σ., Γιωτόπουλος,Σ., Γιαννακούλιας,Ε. Απειροστικός Λογισμός, *Αίθρα, 1995.*

[Πούλος 2009] Πούλος Α. εικασίες και αντιπαραδείγματα, *Μαυρίδη, 2009.*

[Ιστοσελίδα Μπάμπη Σολδάτου] Σολδάτος Μπάμπης Σχέδια Μαθήματος http://plansmath.blogspot.com/ , *http://plansmath.blogspot.com/, 2015.*

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr