

Σημειώσεις

Επίπεδο 1
(ηλικίες 10 – 15 ετών)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Jaroslav Zhouf

Ο σκοπός του κεφαλαίου είναι να γίνει μία επισκόπηση των εισαγωγικών θεμάτων σχετικά με τα πολυώνυμα και τις πολυωνυμικές εξισώσεις. Τα περισσότερα θέματα είναι γνωστά στο ευρύ κοινό, αλλά συνιστούμε σε όλους λύσουν τις ασκήσεις που ακολουθούν, έστω υπό μορφή επανάληψης.

§1. Γραμμικές εξισώσεις

1 Ορισμός της γραμμικής εξίσωσης

Η εξίσωση $ax + b = 0$, όπου τα a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$, καλείται *πρωτοβάθμια* ή *γραμμική εξίσωση* με άγνωστο τον x . Η παράσταση $ax + b$ όπου, όπως πριν, τα a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$, καλείται *διώνυμο*.

Παράδειγμα 1.1

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

α) $3x + 5 = 7x + 13$,

β) $5(2 - x) = -5x - 7$,

γ) $x\sqrt{2} - \sqrt{3} = -(\sqrt{3} - x\sqrt{2})$.

Λύση

α)

$$\begin{aligned} 4x + 8 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} 10 - 5x &= -5x - 7 \\ 0 \cdot x + 17 &= 0 \end{aligned}$$

Κανένας αριθμός δεν ικανοποιεί την εξίσωση. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η εξίσωση είναι *αδύνατη*.

γ)

$$\begin{aligned} x\sqrt{2} - \sqrt{3} &= -\sqrt{3} + x\sqrt{2} \\ 0 \cdot x + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν αυτήν την εξίσωση. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η εξίσωση είναι *αόριστη*.

2 Τύπος για τη ρίζα της γραμμικής εξίσωσης

Η εξίσωση $ax + b = 0$, $a \neq 0$, έχει ακριβώς μια ρίζα, την $x = -\frac{b}{a}$.

3 Διάφορα προβλήματα

Πρόβλημα 1.1

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

$$\alpha) 2 + \frac{x-1}{2} - x = 1,$$

$$\beta) \frac{4x-5}{2} = x - \left(\frac{5}{2} - x\right),$$

$$\gamma) \frac{4x-5}{2} = x - (1-x).$$

Πρόβλημα 1.2

Να επιλυθεί η ακόλουθη εξίσωση στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

$$(3x-1)^2 - 5(2x+1)^2 + 2(6x-3)(x+1) = (x-1)^2 + 3(2x-1).$$

Πρόβλημα 1.3

Σε μία τάξη υπάρχουν μερικοί πάγκοι. Εάν σε κάθε ένα από τους πάγκους εκτός από τον τελευταίο καθίσουν 7 μαθητές, τότε θα περισσέψει μόνο ένας μαθητής για τον τελευταίο πάγκο. Εάν καθίσουν 6 μαθητές σε κάθε ένα από τους πάγκους, τότε ένας μαθητής δεν θα έχει θέση να κάτσει. Πόσοι μαθητές υπάρχουν συνολικά;

§2. Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

1 Εξισώσεις της μορφής γινομένου δύο ή περισσότερων διωνύμων

Εξισώσεις όπως η $(ax+b)(cx+d)=0$, όπου τα a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0, c \neq 0$, έχουν τη μορφή γινομένου δύο διωνύμων. Η λύση τέτοιων εξισώσεων είναι απλή υπόθεση. Χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το γινόμενο δύο ή περισσότερων αριθμών είναι ίσο με μηδέν εάν και μόνο εάν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι ίσος με μηδέν.

Παράδειγμα 2.1

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

$$\alpha) (x-2)(2x+3)=0.$$

$$\beta) 9-x^2=x+3$$

$$\gamma) \left(16x^2 - \frac{9}{4}\right)(1-x^2)=0$$

Λύση

α) Ο αριθμός x είναι η ρίζα της δεδομένης εξίσωσης εάν και μόνο εάν $x-2=0$ ή $2x+3=0$,

δηλαδή

$$x=2 \text{ ή } x=-\frac{3}{2}.$$

Οι ρίζες της δεδομένης εξίσωσης είναι αριθμοί 2 και $-\frac{3}{2}$.

β) Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} 9-x^2 &= x+3 \\ (3-x)(3+x) - (x+3) &= 0 \\ (3+x)(2-x) &= 0 \\ x_1 &= -3, \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

γ) Η παράσταση ανάγεται σε γινόμενο διωνύμων ως εξής:

$$\begin{aligned} \left(16x^2 - \frac{9}{4}\right)(1 - x^2) &= 0 \\ \left(4x - \frac{3}{2}\right)\left(4x + \frac{3}{2}\right)(1 - x)(1 + x) &= 0 \\ x_1 = \frac{3}{8}, \quad x_2 = -\frac{3}{8}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.1

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

α) $x^3 + x^2 - 42x$,

β) $x^4 - 13x^2 + 40$,

γ) $6x^4 - 13x^2 + 6$

2 Κατασκευή μιας εξίσωσης με δύο δεδομένες ρίζες

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη διαδικασία από αυτήν που χρησιμοποιήσαμε για τη επίλυση εξισώσεων της μορφής

$$(ax + b)(cx + d) = 0.$$

Συγκεκριμένα, εάν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 , τότε είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad a \neq 0.$$

Παράδειγμα 2.2

Κατασκευάστε εξίσωση που έχει τις ακόλουθες ρίζες:

α) $x_1 = 2, x_2 = -3$,

β) $x_1 = x_2 = 4$.

Λύση

α) Είναι η εξίσωση

$$a(x - 2)(x - (-3)) = 0, \quad a \neq 0,$$

$$a(x^2 + x - 6) = 0, \quad a \neq 0.$$

Παρατηρήστε ότι εάν ονομάσουμε b τον συντελεστή του x και θέσουμε $-6a = c$, τότε η εξίσωση αυτή έχει την μορφή $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$.

β) Ομοίως,

$$a(x - 4)^2 = 0, \quad a \neq 0,$$

$$a(x^2 - 8x + 16) = 0, \quad a \neq 0.$$

Εάν θέσουμε $8a = b, 16a = c$, παίρνουμε την εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

3 Ορισμός δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, όπου το a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$, καλείται *δευτεροβάθμια εξίσωση* με άγνωστο τον x . Η παράσταση ax^2 καλείται ο τετραγωνικός όρος, η bx ο γραμμικός όρος και c ο σταθερός όρος. Η δε παράσταση $ax^2 + bx + c$, καλείται *τριώνυμο*.

4 Δύο ειδικές δευτεροβάθμιες εξισώσεις

α) Η περίπτωση $c = 0$

Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση είναι η

$$ax^2 + bx = 0, \quad a \neq 0.$$

η οποία μπορεί να λυθεί με την παραγοντοποίηση

$$x(ax + b) = 0.$$

Οι ρίζες της είναι λοιπόν $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$. Παραδείγματος χάριν η εξίσωση

$$2x^2 - 6x = 0$$

γράφεται

$$2x(x - 3) = 0$$

οπότε

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

β) Η περίπτωση $b = 0$

Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση γίνεται

$$ax^2 + c = 0, \quad a \neq 0,$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}, \quad a \neq 0.$$

Εάν $-\frac{c}{a} < 0$, η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική ρίζα.

Εάν $-\frac{c}{a} \geq 0$, η εξίσωση έχει τις ρίζες $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Παράδειγμα 2.3

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

α) $3x^2 + 9 = 0$,

β) $3x^2 - 18 = 0$.

Λύση

α) Η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία πραγματική ρίζα.

β) $x_1 = \sqrt{6}, \quad x_2 = -\sqrt{6}$.

5 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις στην γενική τους μορφή

Μερικές φορές δεν είναι άμεσο πως να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο. Στις περιπτώσεις αυτές καταφεύγουμε στη μέθοδο "συμπλήρωσης του τετραγώνου". Το ακόλουθο παράδειγμα ερμηνεύει την διαδικασία.

Παράδειγμα 2.4

Να επιλυθούν στο σύνολο πραγματικών αριθμών οι

α) $2x^2 + x - 6 = 0$,

β) $9x^2 + 12x + 4 = 0$,

γ) $-2x^2 + 4x - 3 = 0$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη διαδικασία της συμπλήρωσης του τετραγώνου.

α)

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$\left[x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{4} \right)^2 - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{49}{16} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{7}{4} \right) = 0$$

$$(x - 1) \left(x + \frac{5}{2} \right) = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

β)

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 0$$

$$\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$$

γ)

$$x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$$

$$(x - 1)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

Το αριστερό μέλος τελευταίας εξίσωσης είναι θετικό για όλους τους πραγματικούς αριθμούς αλλά το δεξί είναι ίσο μηδέν. Επομένως, η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Πρόβλημα 2.2

Να επιλυθούν στο σύνολο πραγματικών αριθμών με την μέθοδο της συμπλήρωσης του τετραγώνου οι εξισώσεις

α) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

β) $x^2 + 3x + 1 = 0$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία συμπλήρωσης του τετραγώνου για να βρούμε έναν τύπο για τις ρίζες των γενικών δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Αρχίζουμε από την εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Κατ' αρχάς, θα μετασχηματίσουμε την εξίσωση με συντελεστή 1 στον δευτεροβάθμιο όρο:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Κατόπιν συμπληρώνουμε το $x^2 + \frac{b}{a}x$ ώστε να γίνει το τετράγωνο ενός γραμμικού διωνύμου και θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για να λύσουμε την εξίσωση:

$$\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ο παρονομαστής $4a^2$ είναι θετικός και η αριστερή πλευρά της τελευταίας εξίσωσης είναι μη αρνητική. Η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα εάν και μόνο εάν $b^2 - 4ac \geq 0$. Κατά συνέπεια, εάν $b^2 - 4ac \geq 0$, μπορούμε να συνεχίσουμε στην επίλυση της δεδομένης εξίσωσης:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Γράφουμε αυτό σε συντομότερη μορφή ως:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Συμπεραίνουμε ότι η επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $b^2 - 4ac$, η οποία καλείται *διακρίνουσα*. Συμβολίζεται ως

$$D = b^2 - 4ac.$$

Συνοπτικά, έχουμε δείξει ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$,

α) δεν έχει καμία πραγματική ρίζα εάν και μόνο εάν $D < 0$,

β) έχει τις πραγματικές ρίζες $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ εάν και μόνο εάν $D = 0$ (λέμε τη ρίζα

$-\frac{b}{2a}$ είναι μια *διπλή* ρίζα), ή

γ) έχει δύο διαφορετικές ρίζες $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ εάν και μόνο εάν $D > 0$.

Παράδειγμα 2.5

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών χρησιμοποιώντας τον τύπο.

- α) $x^2 + 3 = 4\sqrt{3}x$,
 β) $16x^2 - 8x + 1 = 0$,
 γ) $2x^2 + 8x + 15 = 0$.

Λύση

$$\alpha) \quad D = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 36 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \pm 6}{2} = 2\sqrt{3} \pm 3 = \begin{cases} 2\sqrt{3} + 3 \\ 2\sqrt{3} - 3 \end{cases}$$

$$\beta) \quad D = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{-8}{2 \cdot 16} = \frac{1}{4}$$

$$\gamma) \quad D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = -56 < 0$$

Η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 2.4

Να βρεθούν όλοι αριθμοί x για τους οποίους ορίζεται το κλάσμα $\frac{x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 5x + 2}$.

Λύση

Το κλάσμα δεν ορίζεται για τους αριθμούς x για τους οποίους $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

Λύνοντας την εξίσωση θα βρούμε

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Συνεπώς το κλάσμα ορίζεται στο σύνολο $\mathbf{R} \setminus \{-1, -2/3\}$.

Πρόβλημα 2.3

Να βρεθούν όλοι αριθμοί x για τους οποίους ορίζονται τα παρακάτω κλάσματα. Κατόπιν απλοποιηθούν οι παραστάσεις.

$$\alpha) \frac{4x^2 + 7x - 2}{x^2 - x - 6},$$

$$\beta) \frac{x^2 - 3x + 2}{7(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}.$$

$$\gamma) \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$\delta) \frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 2x + 1},$$

$$\epsilon) \frac{1}{x^2 - 3x - 10} + \frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{2}{x^2 - 6x + 5}.$$

Πρόβλημα 2.4

Να προσδιοριστούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί p για τους οποίους η εξίσωση $x^2 - px + 10 = 0$

έχει μια ρίζα την $x = 2$.

Πρόβλημα 2.5

Να επιλυθούν στο σύνολο πραγματικών αριθμών οι ανισώσεις

$$\alpha) (x+2)^3 \cdot (x+1)^{-1} \cdot (x-1)^{-2} \cdot (x-3)^5 \cdot (x-5)^4 \leq 0,$$

$$\beta) (x^2 - 4x + 5) \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 - 4x - 5) \geq 0.$$

Πρόβλημα 2.6

Ένα αυτοκίνητο έχει να διανύσει μία απόσταση 108 χλμ. Εάν πάει με 3 χλμ την ώρα ταχύτερα από ότι υπολόγιζε, θα φτάσει στον προορισμό του μισή ώρα νωρίτερα. Ποια είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου;

Πρόβλημα 2.7

Το άθροισμα των τετραγώνων τριών διαδοχικών θετικών περιττών αριθμών είναι 155. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

Πρόβλημα 2.8

Αποδείξτε ότι εάν το p είναι το άθροισμα και το q είναι το γινόμενο δύο αριθμών, τότε $4q \leq p^2$.

6 Σχέσεις μεταξύ των ριζών και των συντελεστών των δευτεροβάθμιων

Εάν η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, έχει διακρίνουσα

$$D = b^2 - 4ac \geq 0, \text{ τότε έχει ρίζες τις } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \text{ Ισχύει λοιπόν}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Οι παραπάνω σχέσεις μεταξύ του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών και των συντελεστών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης καλούνται *σχέσεις Vieta*.

Παράδειγμα 2.11

Να βρεθεί συνθήκη μεταξύ των πραγματικών αριθμών a , b , c , όπου $a \neq 0$, αν οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ είναι

α) αντίθετοι αριθμοί,

β) αντίστροφοι αριθμοί.

Λύση

α) Η εξίσωση έχει τις πραγματικές ρίζες, επομένως $b^2 - 4ac \geq 0$. Οι ρίζες x_1 , x_2 είναι οι αντίθετοι αριθμοί, επομένως $0 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ και έτσι $b = 0$. Κατά συνέπεια

$-4ac \geq 0$, ή $ac \leq 0$. Αντίστροφα, εάν $b = 0$ και $ac \leq 0$, με όμοιο συλλογισμό διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες με αντίθετα πρόσημα. Έτσι η εξίσωση έχει αντίθετες ρίζες εάν και μόνο εάν $b = 0$ και $ac \leq 0$.

β) Ομοίως $b^2 - 4ac \geq 0$. Για αντίστροφες ρίζες ισχύει η ισότητα $x_1 x_2 = 1$, έτσι $\frac{c}{a} = x_1 x_2 = 1$ ή $a = c$, και αντίστροφα. Άρα η εξίσωση έχει αντίστροφες ρίζες εάν και μόνο εάν $a = c$ και $b^2 - 4a^2 \geq 0$.

Παράδειγμα 2.12

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 27x + 180 = 0$. Χωρίς να υπολογιστούν οι ρίζες της, βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση οι της οποίας ρίζες είναι οι αντίστροφοι των ριζών της δεδομένης εξίσωσης.

Λύση

Εάν x_1, x_2 είναι ρίζες της δεδομένης εξίσωσης και x'_1, x'_2 ρίζες της νέας εξίσωσης, έχουμε $x'_1 = \frac{1}{x_1}$, $x'_2 = \frac{1}{x_2}$. Όμως, από την δεδομένη εξίσωση έχουμε $x_1 + x_2 = 27$ και $x_1 x_2 = 180$. Για τη νέα εξίσωση είναι

$$x'_1 + x'_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{27}{180},$$

$$x'_1 x'_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{180}.$$

Η νέα εξίσωση, λοιπόν, έχει τη μορφή

$$x^2 - \frac{27}{180}x + \frac{1}{180} = 0,$$

$$180x^2 - 27x + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 2.9

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί p για τους οποίους η διαφορά των δύο ριζών της εξίσωσης

$$x^2 - px + p - 9 = 0$$

είναι ίση με 6.

Πρόβλημα 2.10

Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Χωρίς υπολογισμό των ριζών της, βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση οι της οποίας ρίζες είναι τα τετράγωνα των ριζών της δεδομένης εξίσωσης.

Πρόβλημα 2.11

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί m για τους οποίους η εξίσωση $9x^2 - 18mx - 8m + 16 = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες από τις οποίες η μια είναι διπλάσια της άλλης.

$$9x^2 - 18mx - 8m + 16 = 0$$

Πρόβλημα 2.12

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί p, q , για τους οποίους η εξίσωση $x^2 + px + q = 0$ έχει ρίζες p και q .

Πρόβλημα 2.13

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί m για τους οποίους οι εξισώσεις $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$ και $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$ έχουν μια κοινή ρίζα.

§3. Πολυώνυμα και πολυωνυμικές εξισώσεις ανώτερου βαθμού

1 Ορισμός πολυωνυμικής εξίσωσης

Η εξίσωση

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

όπου $a_n \neq 0$, $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, είναι πραγματικοί αριθμοί, και το n είναι φυσικός αριθμός, καλείται *πολυωνυμική εξίσωση* με άγνωστο τον x . Ο αριθμός n καλείται *βαθμός* της πολυωνυμικής εξίσωσης.

Η παράσταση

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

όπου $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a_n \neq 0$, όπου n φυσικός αριθμός, καλείται *πολυώνυμο του βαθμού n* .

Ειδικές περιπτώσεις πολυωνυμικών εξισώσεων είναι γραμμικές εξισώσεις, $ax + b = 0$, $a \neq 0$, οι δευτεροβάθμιες, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, τριτοβάθμιες ή κυβικές εξισώσεις $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ και ούτω καθ' εξής.

2 Διαίρεση των πολυωνύμων

Η διαίρεση πολυωνύμων λειτουργεί ακριβώς όπως η διαίρεση ακέραιων αριθμών. Τα ακόλουθα παραδείγματα ερμηνεύουν την διαδικασία.

Παράδειγμα 3.1

Να εκτελεστούν οι κάτωθι διαιρέσεις πολυωνύμων.

α) $(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2),$

β) $(9x^4 + 26x^2 + 20) : (3x^2 - 2x + 5).$

Λύση

α)

$$\begin{array}{r} (x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 - 5x - 1 \\ \underline{-x^4 + 3x^3 - 2x^2} \\ -5x^3 + 14x^2 - 7x \\ \underline{5x^3 - 15x^2 + 10x} \\ -x^2 + 3x - 2 \\ \underline{x^2 - 3x + 2} \\ 0 \end{array}$$

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2}{x^2 - 3x + 2} = x^2 - 5x - 1$$

Η διαίρεση αυτή ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \neq 0$, δηλαδή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τους 1 και 2. Ωστόσο, με απευθείας έλεγχο, διαπιστώνουμε ότι η

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2 = (x^2 - 5x - 1)(x^2 - 3x + 2),$$

ισχύει επίσης και για τους $x = 1, x = 2$.

β)

$$(9x^4 + 26x^2 + 20) : (3x^2 - 2x + 5) = 3x^2 + 2x + 5$$

$$\underline{-9x^4 + 6x^3 - 15x^2}$$

$$6x^3 + 11x^2 + 20$$

$$\underline{-6x^3 + 4x^2 - 10x}$$

$$15x^2 - 10x + 20$$

$$\underline{-15x^2 + 10x - 25}$$

$$-5$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$\frac{9x^4 + 26x^2 + 20}{3x^2 - 2x + 5} = 3x^2 + 2x + 5 + \frac{-5}{3x^2 - 2x + 5}$$

Η ταυτότητα ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους $3x^2 - 2x + 5 \neq 0$. Επειδή η $3x^2 - 2x + 5 = 0$ έχει αρνητική διακρίνουσα, δεν έχει ρίζες, οπότε η ταυτότητα ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Μπορούμε επίσης να τη γράψουμε στη μορφή

$$9x^4 + 26x^2 + 20 = (3x^2 + 2x + 5)(3x^2 - 2x + 5) - 5,$$

η οποία ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Γενικότερα ισχύει

Θεώρημα

Αν P και Q πολυώνυμα, τότε υπάρχουν πολυώνυμα R και S με τον βαθμό του S μικρότερο από τον βαθμό του Q , έτσι ώστε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}.$$

Αυτή η ισότητα ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους $Q(x) \neq 0$. Μπορούμε επίσης να γράψουμε στην μορφή

$$P(x) = R(x)Q(x) + S(x),$$

γινομένου πολυωνύμων. Η τελευταία ισότητα ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Πρόβλημα 3.1

Να εκτελεστούν οι κάτωθι διαιρέσεις πολυωνύμων και, επίσης, να γραφεί το αποτέλεσμα στη μορφή γινομένου πολυωνύμων.

α) $(-8x^3 - 27) : (2x + 3)$

β) $(x^4 - 9x^3 - x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 6x + 5)$

γ) $(11x^3 - 32 + 19x^2 + 3x^4 - 28x) : (-4 + 3x)$

3 Ρίζες των πολυωνυμικών εξισώσεων του βαθμού n

Αποδεικνύεται ότι κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

έχει στο πολύ n πραγματικές ρίζες.

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις (εκτός από τις εξισώσεις πρώτου βαθμού) μπορεί να έχουν ρίζες με *πολλαπλότητα*. Παραδείγματος χάριν, από την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, είδαμε περιπτώσεις διπλής ρίζας. Γενικά, θα λέμε ότι μία ρίζα x_0 μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, έχει πολλαπλότητα k , εάν και μόνο εάν το πολυώνυμο είναι πολλαπλάσιο του $(x - x_0)^k$ αλλά όχι του $(x - x_0)^{k+1}$.

Παράδειγμα 3.2

Η εξίσωση

$$(x-1)^3 x^2 (x+1) = 0$$

έχει τη ρίζα $x = 1$ με πολλαπλότητα τρία, την $x = 0$ με πολλαπλότητα δύο και την ρίζα $x = -1$ ως απλή.

4 Σχέσεις μεταξύ των ριζών και των συντελεστών των πολυωνυμικών εξισώσεων

Εάν η εξίσωση

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

όπου $a_n \neq 0$, έχει ρίζες $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (λαμβάνοντας υπ' όψη και την πολλαπλότητα) αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Εάν απλοποιήσουμε το γινόμενο στο δεξί μέλος της ισότητας, θα πάρει την μορφή τη μορφή

$$a_n [x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x^{n-1} + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) x^{n-2} + \dots + (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n].$$

Συγκρίνοντας τις δύο παραστάσεις παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις του *Vieta*:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

.....

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

5 Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων

Στις παραπάνω παραγράφους έχουμε συναγάγει τύπους για τις ρίζες των γραμμικών και των δευτεροβάθμιων εξισώσεων συναρτήσει των συντελεστών. Υπάρχουν τύποι για τις ρίζες των εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμών. Επειδή, όμως, οι τύποι αυτοί είναι κάπως πιο περίπλοκοι, δεν θα τους εισαγάγουμε εδώ.

Για τις εξισώσεις ανώτερου βαθμού τα πράγματα είναι ακόμα πιο περίπλοκα και, εν γένει, δεν έχουμε καθολικές μεθόδους για την επίλυσή τους. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια διαδικασία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση μερικών ειδικών περιπτώσεων πολυωνυμικών εξισώσεων. Βασίζεται στον προσδιορισμό μιας ρίζας, εάν αυτό είναι εφικτό, και κατόπιν την αναγωγή της αρχικής εξίσωσης σε εξίσωση χαμηλότερου βαθμού. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Εάν x_1 είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

τότε

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) = 0, \quad b_{n-1} \neq 0.$$

Οι άλλες ρίζες της δεδομένης εξίσωσης μπορούν να βρεθούν με την επίλυση της εξίσωσης

$$b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0, \quad b_{n-1} \neq 0.$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε αυτήν την διαδικασία και να βρούμε όλες τις ρίζες της δεδομένης εξίσωσης.

Παράδειγμα 3.3

Να επιλυθεί η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λύση

Θα κάνουμε δοκιμές! Θα αντικαταστήσουμε το x στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης με διάφορες τιμές. Στην συγκεκριμένη εξίσωση είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $x_1 = 1$ είναι ρίζα. Έτσι

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 + px + q).$$

Μπορούμε να βρούμε το πολυώνυμο $x^2 + px + q$ κάνοντας τη διαίρεση του πολυωνύμου $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ με το $x - 1$. Ένας άλλος τρόπος είναι με σύγκριση των συντελεστών του πολυωνύμου

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

και του ίσου του

$$(x - 1)(x^2 + px + q) = x^3 + (p - 1)x^2 + (q - p)x - q.$$

Έπεται ότι $p - 1 = -6$, $q - p = 11$, $-q = -6$ και άρα $p = -5$, $q = 6$. Κατά συνέπεια,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Η εξίσωση έχει ρίζες τις $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Παράδειγμα 3.4

Να επιλυθεί η εξίσωση $x^5 - x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 24 = 0$ στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λύση

Εάν αντικαταστήσουμε το x με διάφορες τιμές, θα διαπιστώσουμε ότι η εξίσωση έχει ρίζες τις $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 24 &= (x + 3)(x - 2)(x^3 + px^2 + qx + r) = \\ &= x^5 + (p + 1)x^4 + (p + q - 6)x^3 + (-6p + q + r)x^2 + (-6q + r)x - 6r. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $p + 1 = -1$, $p + q - 6 = -6$, $-6p + q + r = 10$, $-6q + r = -16$, $-6r = 24$. Άρα $p = -2$, $q = 2$, $r = -4$. Αναγόμεναι λοιπόν στην επίλυση της εξίσωσης

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Βρίσκουμε πάλι την ρίζα $x_3 = 2$. Επομένως

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + sx + t) = x^3 + (s - 2)x^2 + (t - 2s)x - 2t.$$

Έπεται ότι $s - 2 = -2$, $t - 2s = 2$, $-2t = -4$, οπότε τελικά $s = 0$, $t = 2$. Τέλος, καταλήγουμε στην εξίσωση $x^2 + 2 = 0$ που δεν πραγματικές ρίζες.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση έχει ρίζες τις $x_1 = -3$, $x_2 = x_3 = 2$.

Παράδειγμα 3.5

Να επιλυθεί η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λύση

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το κυβικό πολυώνυμο στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 &= 2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 2(x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) = \\ &= (x + 1)(2x^2 - 2x + 2 - 3x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2) \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει τη ρίζα $x_1 = -1$. Έπειτα λύνουμε την εξίσωση

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

που με τη βοήθεια του τύπου βρίσκουμε ότι

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Η εξίσωση έχει ρίζες τις $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 3.2

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών, αφού πρώτα προσδιοριστεί με δοκιμές τουλάχιστον μία ρίζα καθεμιάς.

α) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$,

β) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$,

γ) $x^3 = 24x - 72$.

Πρόβλημα 3.3

Να επιλυθούν με παραγοντοποίηση οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

α) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$,

β) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$,

γ) $x^6 - 1 = 0$.

6 Ρητές ρίζες των πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές

Έχουμε επιλύσει πολυωνυμικές εξισώσεις προσδιορίζοντας πρώτα, με δοκιμές, μία ή περισσότερες ρίζες. Ο προσδιορισμός αυτός δεν γίνεται τελείως στην τύχη. Υπάρχουν περιπτώσεις (όχι όμως πάντα) όπου μπορούμε να μειώσουμε δραστικά το κόπο μας κατά την διαδικασία αναζήτησης ρίζας. Μια τέτοια περίπτωση καλύπτεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Εάν η πολυωνυμική εξίσωση

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

όπου $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ είναι ακέραιοι αριθμοί, έχει κάποια ρητή ρίζα $\frac{r}{s}$, όπου τα r και s είναι σχετικά πρώτοι ακέραιοι, τότε ο αριθμός r είναι διαιρέτης του a_0 και ο s είναι διαιρέτης του a_n .

Το θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να βρούμε όλες τις ρητές ρίζες (αν υπάρχουν) μιας δεδομένης πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Οι υπόλοιπες πραγματικές ρίζες (αν υπάρχουν) της εξίσωσης θα είναι από το σύνολο αρρήτων αριθμών.

Παράδειγμα 3.6

Να επιλυθεί η εξίσωση $x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 12 = 0$ στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λύση

Οι διαιρέτες του 12 είναι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ και οι διαιρέτες του 1 είναι αριθμοί ± 1 . Επομένως, οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\pm \frac{1}{1}$,

$\pm \frac{2}{1}, \pm \frac{3}{1}, \pm \frac{4}{1}, \pm \frac{6}{1}, \pm \frac{12}{1}$ δηλαδή οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Εάν αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές στο x (οποιαδήποτε άλλη περιπτώσει να ελεγχθεί) στην αριστερή πλευρά της δεδομένης εξίσωσης, θα διαπιστώσουμε ότι οι αριθμοί $x_1 = 3, x_2 = 4$ είναι οι ρίζες. Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 12 &= (x-3)(x-4)(x^2 + px + q) = (x^2 - 7x + 12)(x^2 + px + q) = \\ &= x^4 + (p-7)x^3 + (-7p+q+12)x^2 + (12q-7q)x + 12q = (x-3)(x-4)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

(παραλείψαμε το βήμα εύρεσης των p και q , το οποίο όμως είδαμε πολλές φορές στα παραπάνω). Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 3, x_2 = 4$ και καμία άλλη στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 3.7

Να επιλυθεί η εξίσωση $2x^3 + 11x^2 + 17x + 6 = 0$ στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λύση

Οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι αριθμοί $\pm \frac{1}{1}, \pm \frac{2}{1}, \pm \frac{3}{1}, \pm \frac{6}{1}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{6}{2}$, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$. Εάν δοκιμάζουμε όλους αυτούς τους αριθμούς, διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = -\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 3.4

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

α) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$,

β) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0$.

Πρόβλημα 3.5

Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

$$\alpha) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{2x^2 - 2}{x^2} = 2x,$$

$$\beta) \frac{x^2}{3} - \frac{32}{x^2} = 8 \left(\frac{x}{3} - \frac{11}{3x} \right).$$

7 Συστήματα γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Τα παραδείγματα που ακολουθούν ερμηνεύουν την διαδικασία αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων.

Παράδειγμα 3.8

Να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Λύση

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $y = 3x - 5$, την οποία αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση:

$$x^2 + (3x - 5)^2 = 25$$

$$10x^2 - 30x = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

Από τη δεύτερη εξίσωση, παίρνουμε:

$$y_1 = 3x_1 - 5 = -5, \quad y_2 = 3x_2 - 5 = 4$$

Μετά από τη δοκιμή, ανακαλύπτουμε ότι το δεδομένο σύστημα έχει δύο λύσεις την $(x_1 = 0, y_1 = -5)$ και την $(x_2 = 3, y_2 = 4)$.

Παράδειγμα 3.9

Να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18x - 18y - 7 = 0 \end{cases}$$

Λύση

Αφαιρούμε την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη και λαμβάνουμε:

$$18x - 18y - 7 = -25$$

$$y = x + 1$$

Αντικαθιστούμε αυτήν την παράσταση στην πρώτη εξίσωση. Παίρνουμε δύο λύσεις του δεδομένου συστήματος, τις $x_1 = -4, y_1 = -3$ και $x_2 = 3, y_2 = 4$.

Πρόβλημα 3.6

Να επιλυθούν τα ακόλουθα συστήματα των εξισώσεων στο σύνολο πραγματικών αριθμών:

$$\alpha) \begin{cases} xy + 2x + 2y + 1 = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2y - z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10 \end{cases}$$

8 Αντικατάσταση

Μία μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά για ορισμένες εξισώσεις ανώτερου βαθμού είναι η μέθοδος αντικατάστασης. Σύμφωνα με αυτήν, κάποια παράσταση της μεταβλητής αντικαθίσταται με νέα μεταβλητή, και το αποτέλεσμα είναι μία απλούστερη εξίσωση. Τα παραδείγματα που ακολουθούν ερμηνεύουν την διαδικασία.

Παράδειγμα 3.10

Να επιλυθεί η εξίσωση $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λύση

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $y = x^2$. Η δεδομένη εξίσωση μετασχηματίζεται σε νέα την εξίσωση την οποία μπορούμε να επιλύσουμε εύκολα:

$$\begin{aligned} y^2 - 3y + 2 &= 0, \\ (y - 1)(y - 2) &= 0, \end{aligned}$$

που έχει ρίζες $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Κατά συνέπεια η δεδομένη εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$.

Παράδειγμα 3.11

Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{3x}{2x-1} + 1 = 2 \cdot \frac{2x-1}{x}$ στο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λύση

Για $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $y = \frac{x}{2x-1}$. Η δεδομένη εξίσωση μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$\begin{aligned} 3y + 1 &= 2 \cdot \frac{1}{y}, \\ y^2 + \frac{y}{3} - \frac{2}{3} &= 0, \\ (y + 1)\left(y - \frac{2}{3}\right) &= 0, \end{aligned}$$

που έχει ρίζες $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{2}{3}$.

Αυτό οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{x}{2x-1} = -1,$$

Η οποία έχει τη ρίζα $x_1 = \frac{1}{3}$, και την εξίσωση

$$\frac{x}{2x-1} = \frac{2}{3},$$

η οποία έχει ρίζα $x_2 = 2$.

Συμπεραίνουμε ότι η δεδομένη εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Πρόβλημα 3.7

Να επιλυθούν στο σύνολο πραγματικών αριθμών οι ακόλουθες εξισώσεις, αφού πρώτα γίνει κατάλληλη αντικατάσταση της μεταβλητής.

α) $(x^2 + 2x)^2 - 7x^2 - 14x - 8 = 0$,

β) $\sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{2x}} = 2$,

γ) $(x^2 - x)^2 - 3|x^2 - x| - 4 = 0$,

δ) $x^2 + 3x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

Πρόβλημα 3.8

Να επιλυθούν στο σύνολο πραγματικών αριθμών τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων, αφού πρώτα γίνει κατάλληλη αντικατάσταση των μεταβλητών.

α)
$$\begin{cases} \frac{2(x-1)}{y+1} - \frac{3(y+2)}{x-1} = 3 \\ \frac{x-1}{y+1} - \frac{2(y+2)}{x-1} = -2 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{2x}} = 2 \\ 2x(x+y) = 144 \end{cases}$$

§4. Δυσκολότερα προβλήματα

Πρόβλημα 4.1

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς c η εξίσωση $x^3 + (c-1)x + c = 0$ έχει μόνο δύο διαφορετικές ρίζες;

Πρόβλημα 4.2

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς p έχει το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x^3 - x + 3p = 6 \\ x^3 + x + 4p = 10 \end{cases}$$

τουλάχιστον μια λύση στο σύνολο πραγματικών αριθμών;

Πρόβλημα 4.3

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς a έχει το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x + y = z + 2 \\ x^2 + y^2 = z^2 + 4 \\ x^3 + y^3 = z^3 + a \end{cases}$$

τουλάχιστον μια λύση στο σύνολο πραγματικών αριθμών; Για τις τιμές αυτές του a να επιλυθεί το σύστημα.

Πρόβλημα 4.4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς p η εξίσωση

$$x^3 + px^2 + 2px = 3p + 1$$

έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες x_1 , x_2 και x_3 για τις οποίες ισχύει $x_1 x_2 = x_3^2$.

Πρόβλημα 4.5

Δείξτε ότι για κάθε πραγματική της παραμέτρου r , η εξίσωση

$$x^3 - 1996x^2 + rx + 1995 = 0$$

έχει το πολύ μια ακέραια ρίζα.

Πρόβλημα 4.6

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς p η εξίσωση

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

έχει δύο διαφορετικές ρίζες x_1 , x_2 για τις οποίες το άθροισμα $x_1^2 + x_2^2$ είναι το μικρότερο δυνατό;

Πρόβλημα 4.7

Να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα των εξισώσεων στο σύνολο πραγματικών αριθμών

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 24xy = 0 \\ \frac{12x}{x^2 + 1} + \frac{12y}{y^2 + 1} + 1 = 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα 4.8

βρίσκει όλα τα πολυώνυμα P για τα οποία για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x η εξίσωση κρατά

$$P(2x) = 8P(x) + (x - 2)^2.$$

Πρόβλημα 4.9

Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P , Q για τα οποία ισχύει η ταυτότητα

$$Q(x^2) = (x + 1)^4 - x(P(x))^2.$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Πρόβλημα 4.10

Να απλοποιηθεί το γινόμενο

$$(1 - x + x^2 - \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100}).$$

Πρόβλημα 4.11

Να βρεθεί το άθροισμα S των συντελεστών του πολυωνύμου

$$F(x) = (1 - 3x + 3x^2)^{1988} \cdot (1 + 3x - 3x^2)^{1989}.$$

Πρόβλημα 4.12

Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα F που ικανοποιούν:

α) $F(x+3) = x^2 + 7x + 12,$

β) $F(x^2+1) = x^{11} - 8x^7 + 6x^5 - 4,$

γ) $F(x-1) + 2F(x+1) = 3x^2 - 7x.$

Πρόβλημα 4.13

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

δια α) $x-1$, β) x^2-1 .

Πρόβλημα 4.14

Να προσδιοριστεί το μικρότερου δυνατού βαθμού πολυώνυμο F το οποίο αφήνει υπόλοιπο $2x$ και, αντίστοιχα, $3x$ όταν διαιρεθεί διά $(x-1)^2$ και $(x-2)^3$.

Πρόβλημα 4.15

Να προσδιορισθεί φυσικός αριθμός n για τον οποίο το πολυώνυμο

$$F(x) = x^n + (x-1)^n + (2x-1)^n - (3^n + 2^n + 1)$$

είναι πολλαπλάσιο του $G(x) = x^2 - x - 2$.

Πρόβλημα 4.16

Έστω ότι το άθροισμα δύο ριζών της εξίσωσης

$$2x^3 - x^2 - 7x + d = 0$$

είναι ίσο με 1. Να βρεθεί το d καθώς και οι ρίζες της εξίσωσης.

Πρόβλημα 4.17

Έστω ότι οι ρίζες x_1, x_2, x_3 της εξίσωσης $x^3 + px + q = 0$ ικανοποιούν $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Ποια συνθήκη ικανοποιούν οι συντελεστές p, q ;

Πρόβλημα 4.18

Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί a, b, p, q έτσι ώστε, για κάθε x , να ισχύει

$$(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}.$$

§5. Απαντήσεις

Πρόβλημα 1.1: α) $x=1$, β) καμία λύση, γ) όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

Πρόβλημα 1.2: $x = -\frac{1}{3}$.

Πρόβλημα 1.3: 43 μαθητές.

Πρόβλημα 2.1: α) $x(x+7)(x-6),$

β) $(x^2-5)(x^2-8) = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8}),$

γ)

$$6x^4 - 4x^2 - 9x^2 + 6 = 2x^2(3x^2-2) - 3(3x^2-2) = (\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$$

Πρόβλημα 2.2: α) $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$, β) $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Πρόβλημα 2.3: α) $\frac{4x-1}{x-3}$, $x \neq -2$, $x \neq 3$, β) $\frac{1}{7(x+1)(x-3)}$, $x \neq \pm 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$.

γ) $\frac{x-2}{x+2}$, $x \neq -2$, $x \neq \pm 1$. δ) $\frac{2x^2+4x-2}{(x^2-1)^2}$, $x \neq \pm 1$, ε) $\frac{10}{(x-5)(x+2)(1-x)}$,

$x \neq -2$, $x \neq 5$, $x \neq 1$.

Πρόβλημα 2.4: $p = 7$.

Πρόβλημα 2.5: α) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (1, 3)$, β) $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

Πρόβλημα 2.6: Υπόδειξη - $vt = 108$, $(v+3)\left(t - \frac{1}{2}\right) = 108$, $2t^2 - t - 36 = 0$, $t = \frac{9}{2}$ ώρες.

Πρόβλημα 2.7: Υπόδειξη - $x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = 155$. Οι τρεις διαδοχικοί θετικοί περιττοί αριθμοί είναι οι 5, 7, 9.

Πρόβλημα 2.8: Υπόδειξη - οι αριθμοί p , q είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - px + q = 0$.

Πρόβλημα 2.9: Υπόδειξη $x_1 + x_2 = p$, $x_1 - x_2 = 6$, $x_1 = \frac{p+6}{2}$, $x_2 = \frac{p-6}{2}$,

$x_1 x_2 = \frac{p^2-36}{4}$ και επίσης $x_1 x_2 = p - 9$, οπότε $p^2 - 4p = 0$, $p = 0$ ή $p = 4$.

Πρόβλημα 2.10: $x'_1 + x'_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$,

$x'_1 x'_2 = x_1^2 x_2^2 = \frac{c^2}{a^2}$ η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - \frac{b^2 - 2ac}{a^2}x + \frac{c^2}{a^2} = 0$, δηλαδή $a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$.

Πρόβλημα 2.11: Υπόδειξη - $x_1 = 2x_2$, $x_1 + x_2 = 3x_2 = 2m$, $x_1 x_2 = 2x_2^2 = \frac{16-8m}{9}$,

οπότε $m_1 = -2$, $m_2 = 1$

Πρόβλημα 2.12: $p = q = 0$ ή $p = 1$, $q = -2$.

Πρόβλημα 2.13: $m = 3$, η κοινή ρίζα είναι $x = 4$.

Πρόβλημα 3.1: α) $(-8x^3 - 27):(2x+3) = -4x^2 + 6x - 9$, $x \neq -\frac{3}{2}$, ή

$-8x^3 - 27 = (-4x^2 + 6x - 9)(2x+3)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x ,

β) $\frac{x^4 - 9x^3 - x^2 - 7x - 2}{x^2 - 6x + 5} = x^2 - 3x - 24 - \frac{136x - 118}{x^2 - 6x + 5}$, $x \neq -5$, $x \neq 1$,

ή $x^4 - 9x^3 - x^2 - 7x - 2 = (x^2 - 3x - 24)(x^2 - 6x + 5) - (136x - 118)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x ,

γ) $(11x^3 - 32 + 19x^2 + 3x^4 - 28x):(-4+3x) = x^3 + 5x^2 + 13x + 8$, $x \neq \frac{4}{3}$, ή

$11x^3 - 32 + 19x^2 + 3x^4 - 28x = (x^3 + 5x^2 + 13x + 8)(-4+3x)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x .

Πρόβλημα 3.2: α) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, β) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = 2$, γ) $x = -6$.

Πρόβλημα 3.3: α) $(x+3)(x+1)(x-1) = 0$, β) $(x+1)^3 = 0$,

$$\gamma) (x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0.$$

Πρόβλημα 3.4: α) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, β) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Πρόβλημα 3.5: α) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, β) $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{5}$.

Πρόβλημα 3.6: α) $(4 - \sqrt{33}, 4 + \sqrt{33})$, $(4 + \sqrt{33}, 4 - \sqrt{33})$, β) $(1,1)$, $(2,2)$, γ) $(3,0,1)$,
 $(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

Πρόβλημα 3.7: α) $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = -1$, β) $x = 1$, γ) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$,

δ) $x_{1,1} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Πρόβλημα 3.8: α) καμία λύση, β) $(-6, -6)$, $(6,6)$.

Πρόβλημα 4.1: Υπόδειξη - $(x+1)(x^2-x+c)=0$, οπότε $c = -2$ ή $c = \frac{1}{4}$.

Πρόβλημα 4.2: $p = 0$ ή $p = 2$ ή $p = 10$.

Πρόβλημα 4.3: $a = 8$, η λύση του συστήματος των εξισώσεων είναι $[x, y, z] = [2, p, p]$ ή $[x, y, z] = [p, 2, p]$, όπου το p είναι πραγματική παράμετρος.

Πρόβλημα 4.4: Υπόδειξη - χρήσης θεωρήματος Vieta. Είναι $p = -3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

Πρόβλημα 4.5: Υπόδειξη - εάν το a , b , c είναι ρίζες έπεται $a+b+c=1996$ και $abc=1995$.

Πρόβλημα 4.6: Υπόδειξη - χρήσης θεωρήματος Vieta και η ταυτότητα

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2. \text{ Είναι } p = 1, x_1^2 + x_2^2 = 26.$$

Πρόβλημα 4.7: Υπόδειξη - κάνετε την αντικατάσταση $u = \frac{x}{x^2+1}$, $v = \frac{y}{y^2+1}$. Λύσεις

$$(x,y) = (3+\sqrt{8}, -2+\sqrt{3}), (x,y) = (3+\sqrt{8}, -2-\sqrt{3}), (x,y) = (3-\sqrt{8}, -2+\sqrt{3}),$$

$$(x,y) = (3-\sqrt{8}, -2-\sqrt{3}), (x,y) = (-2+\sqrt{3}, 3+\sqrt{8}), (x,y) = (-2+\sqrt{3}, 3-\sqrt{8}),$$

$$(x,y) = (-2-\sqrt{3}, 3+\sqrt{8}), (x,y) = (-2-\sqrt{3}, 3-\sqrt{8}).$$

Πρόβλημα 4.8: Υπόδειξη - ο βαθμός του πολυωνύμου είναι 2 ή περισσότερο.

Απάντηση: $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$ ή $P(x) = ax^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$, όπου a πραγματική παράμετρος.

Πρόβλημα 4.9: Τέσσερις λύσεις α) $P(x) = 2x+2$ και $Q(x) = x^2 - 2x+1$, β)

$P(x) = 2x-2$ και $Q(x) = x^2 + 14x+1$, γ) $P(x) = -2x+2$ και $Q(x) = x^2 + 14x+1$,

δ) $P(x) = -2x-2$ και $Q(x) = x^2 - 2x+1$.

Πρόβλημα 4.10: $1+x^2+x^4+\dots+x^{198}+x^{200}$.

Πρόβλημα 4.11: $S = F(1) = 1$.

Πρόβλημα 4.12: α) $F(x) = x^2 + x$, β) κανένα τέτοιο πολυώνυμο δεν υπάρχει επειδή το $F(x^2+1)$ έχει άρτιο βαθμό, γ) $F(x) = x^2 - 3x$.

Πρόβλημα 4.13: α) 6, β) $6x$.

Πρόβλημα 4.14: Υπόδειξη - χρησιμοποιήστε την ισότητα

$F(x) = (x-1)^2 P(x) + 2x = (x-2)^3 Q(x) + 3x$, το πολυώνυμο $(3x-4)Q(x) + x$ πρέπει να διαιρεθεί δια του $(x-1)^2$. Το αποτέλεσμα είναι $F(x) = 4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x + 24$.

Πρόβλημα 4.15: Υπόδειξη - $G(x) = (x+1)(x-2)$, πρέπει να ισχύει $F(-1) = F(2) = 0$. Το n είναι άρτιος.

Πρόβλημα 4.16: Υπόδειξη - εάν $x_1 + x_2 = 1$, επομένως $x_3 = -\frac{1}{2}$, από όπου $d = -3$ και $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Πρόβλημα 4.17: Υπόδειξη - $-q = x_1 x_2 x_3 = x_1 + x_2 = -x_3$. Απάντηση: $q^3 + pq + q = 0$.

Πρόβλημα 4.18: Υπόδειξη - συγκρίνετε το συντελεστή x^{20} , θέστε $x = \frac{1}{2}$, επομένως $a = \pm \sqrt[20]{2^{20} - 1}$, $b = -\frac{a}{2}$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}$, από όπου $p = -1$, $q = \frac{1}{4}$.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Αριθμητικές, Γεωμετρικές και Αρμονικές πρόοδοι

Péter Körtesi και Jenő Szigeti

§1. Διαισθητική εισαγωγή στις ακολουθίες

Ακολουθία ονομάζουμε οποιαδήποτε διαδοχική καταγραφή πραγματικών αριθμών ως πρώτος, δεύτερος, τρίτος και λοιπά. Οι εν λόγω αριθμοί ονομάζονται *όροι* της ακολουθίας. Ένα παράδειγμα είναι οι ίδιοι οι φυσικοί αριθμοί με την σειρά που εμφανίζονται:

1, 2, 3, 4, ...

Ένα άλλο είναι τα τετράγωνα τους:

1, 4, 9, 16, ...

Οι τελίτσες που εμφανίζονται στα δύο αυτά παραδείγματα δηλώνουν ότι οι συγκεκριμένες ακολουθίες «δεν σταματούν», δηλαδή ότι οι ακολουθίες αυτές είναι «άπειρες». Αν όμως η ακολουθία δεν είναι άπειρη, αν δηλαδή κάποιος όρος της είναι τελευταίος, τότε λέμε ότι η ακολουθία είναι *πεπερασμένη*.

Τον πρώτο, δεύτερο, τρίτο και λοιπά όρο μιας ακολουθίας τους συμβολίζουμε συνήθως με ένα γράμμα και τον αντίστοιχο δείκτη. Παραδείγματος χάριν τους γράφουμε ως a_1 , a_2 , a_3 και ούτω καθ' εξής. Γενικά, ο n -οστός όρος συμβολίζεται a_n , και ονομάζεται ο *γενικός όρος* της ακολουθίας. Η ίδια η ακολουθία συμβολίζεται ως $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Παραδείγματος χάριν ο γενικός όρος της παραπάνω ακολουθίας 1, 2, 3, 4, ... είναι ο $a_n = n$, και της 1, 4, 9, 16, ... ο $a_n = n^2$.

Θεωρήστε τώρα την ακολουθία της οποίας ο γενικός όρος είναι, ας πούμε, $a_n = 2n - 1$. Μερικοί πρώτοι όροι της είναι οι

1, 3, 5, 7, ...

Συχνά αντιστρέφουμε αυτή την διαδικασία: Εάν μας δοθούν μερικοί πρώτοι όροι μιας ακολουθίας, εξετάζουμε τότε μήπως παρατηρήσουμε κάποια «κανονικότητα». Σε αυτή την περίπτωση διατυπώνουμε έναν κανόνα με τον οποίο παράγεται η ακολουθία μαντεύοντας τον γενικό όρο. Η αλήθεια είναι ότι, όσους αρχικούς όρους και αν μας δώσουν, αυτοί δεν επαρκούν για να καταγράψουμε τον γενικό όρο. Αυτό συμβαίνει διότι, όσους αριθμούς και αν μας δώσουν, πάντα υπάρχουν *πολλοί κανόνες* που ταιριάζουν σε αυτούς. Στη πράξη όμως χρησιμοποιούμε τον «κοινό νου» για να περιγράψουμε έναν γενικό όρο. Παραδείγματος χάριν, αν μας δοθούν οι όροι

2, 4, 6, 8, 10, ...

φαίνεται «λογικό» να θεωρήσουμε ότι ο γενικός όρος είναι ο $a_n = 2n$. Ωστόσο ο τύπος

$$a_n = 2n + 1000(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

δίνει επίσης τους ίδιους πέντε όρους για $n = 1, 2, 3, 4, 5$ αλλά φαίνεται «λογικότερο» να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $a_n = 2n$ που αναφέραμε πρωτύτερα.

Η διαδικασία σύμφωνα με την οποία συνάγουμε έναν κανόνα από την παρατήρηση ορισμένων αριθμητικών δεδομένων ονομάζεται (*ατελής*) *Επαγωγικός Συλλογισμός*.

Δεν πρόκειται για συμπεράσματα που βασίζονται σε γεγονότα (παραγωγικός συλλογισμός) αλλά μια πρόγνωση που βασίζεται σε παρατηρήσεις. Δεν παύει όμως να είναι χρήσιμο εργαλείο, και θα το ακολουθήσουμε.

Πρόβλημα 1. Παρατηρείστε τους κάτωθι πρώτους όρους μιας ακολουθίας και διατυπώστε τον κανόνα που ακολουθούν. Στην κάθε περίπτωση καταγράψτε τους επόμενους τρεις όρους στην κάθε ακολουθία.

a) 7, 13, 19, 25, _____, _____, _____

b) 3, 1, -1, -3, -5, _____, _____, _____

c) $6, 7\frac{1}{2}, 9, 10\frac{1}{2}, 12, \text{_____}, \text{_____}, \text{_____}$

Σημειώνουμε ότι δεν είναι σωστό ότι κάθε ακολουθία περιέχει μια «κανονικότητα». Παραδείγματος χάριν η ακολουθία

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, \dots$$

δεν περιέχει καμία κανονικότητα αλλά μερικοί θα παρατηρήσουν ότι οι όροι της είναι τα ψηφία στο δεκαδικό ανάπτυγμα του αριθμού $\pi = 3, 141592653589\dots$, του πηλίκου της περιμέτρου προς την διάμετρο του κύκλου.

§2. Πρόοδοι

Οι πρόοδοι είναι τύποι ακολουθιών οι οποίες έχουν μία «κανονικότητα», και έχουν μελετηθεί ήδη από την αρχαιότητα. Στα παρακάτω θα μελετήσουμε ορισμένα από τα βασικότερα είδη προόδων, τις λεγόμενες αριθμητική, γεωμετρική και αρμονική πρόοδο. Ο ακριβής ορισμός δίνεται παρακάτω.

Εξ ορισμού, κάθε όρος *αριθμητικής προόδου* μετά τον πρώτο, προκύπτει από την πρόσθεση μιας σταθεράς στον προηγούμενό της όρο. Έτσι, αν σε μία αριθμητική πρόοδο $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η σταθερά είναι r , έχουμε

$$a_2 = a_1 + r, a_3 = a_2 + r, a_4 = a_3 + r, a_5 = a_4 + r, \dots$$

Παρατηρήστε ότι αφού $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \dots$ η σταθερά μπορεί να προσδιοριστεί αν ληφθεί οποιοσδήποτε όρος μετά τον πρώτο και αφαιρεθεί από αυτόν ο προηγούμενος όρος. Η σταθερά αυτή ονομάζεται η *διαφορά* της προόδου.

Πρόβλημα 2. Στις ακόλουθες αριθμητικές προόδους, να προσδιοριστεί η διαφορά και κατόπιν να υπολογισθούν κάθε φορά οι επόμενοι δύο όροι τους.

a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, \text{_____}, \text{_____}, \text{_____}$

b) $-10, -4, 2, 8, 14, \text{_____}, \text{_____}, \text{_____}$

c) $-\frac{9}{10}, -\frac{4}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \text{_____}, \text{_____}, \text{_____}$

Εξ ορισμού, κάθε όρος *γεωμετρικής προόδου* μετά τον πρώτο, προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του προηγούμενου της όρου επί μία σταθερά. Έτσι, αν σε μία γεωμετρική πρόοδο $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η σταθερά είναι r , έχουμε

$$a_2 = a_1 r, a_3 = a_2 r, a_4 = a_3 r, a_5 = a_4 r, \dots$$

Παρατηρήστε ότι αν όλοι οι a_n είναι μη-μηδενικοί, τότε

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \dots$$

Και άρα η σταθερά μπορεί να προσδιοριστεί αν ληφθεί οποιοσδήποτε όρος μετά τον πρώτο και διαιρεθεί από τον προηγούμενο όρο. Η σταθερά αυτή ονομάζεται *λόγος* της γεωμετρικής προόδου.

Πρόβλημα 3. Να προσδιοριστεί ο λόγος καθώς και οι επόμενοι δύο όροι στις ακόλουθες γεωμετρικές προόδους.

a) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots, \dots$

b) $1, -3, 9, -27, 81, \dots, \dots$

c) $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{4}{81}, \dots, \dots$

d) $20, 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{5}{64}, \dots, \dots$

Εξ ορισμού, μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μη-μηδενικών όρων ονομάζεται *αρμονική πρόοδος* αν η ακολουθία $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ των αντιστρόφων της είναι αριθμητική πρόοδος.

Λόγου χάριν η

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

είναι αρμονική πρόοδος διότι η ακολουθία

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

των αντιστρόφων της είναι αριθμητική πρόοδος.

Πρόβλημα 4. Να προσδιοριστούν οι επόμενοι δύο όροι στις κάτωθι αρμονικές προόδους.

a) $\frac{3}{11}, \frac{3}{12}, \frac{3}{13}, \frac{3}{14}, \frac{3}{15}, \dots, \dots$

b) $\frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}, \frac{1}{20}, \dots, \dots$

c) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \dots, \dots$

d) $3, \frac{3}{7}, \frac{3}{13}, \frac{3}{19}, \dots, \dots$

Πρόβλημα 5. Εξετάστε τις κάτωθι ακολουθίες ως προς την «κανονικότητα». Στην κάθε περίπτωση αποφανθείτε αν πρόκειται για αριθμητική, γεωμετρική ή αρμονική πρόοδο, ή τίποτα από αυτά. Στην περίπτωση που πρόκειται για αριθμητική, γεωμετρική ή αρμονική πρόοδο, υπολογίστε κάθε φορά τους επόμενους δύο όρους.

a) $2, 3, 4, 5, 6, \dots$

b) $2, 4, 8, 16, \dots$

c) $x, 5x, 25x, \dots$

d) $\frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, 3, \dots$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε μία ιστορική αναδρομή σχετικά με προόδους.

Οι αριθμητικές και γεωμετρικές πρόοδοι εμφανίστηκαν σε μαθηματικά προβλήματα που μελετήθηκαν περί τα τέσσερις χιλιάδες χρόνια πριν. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα στον αρχαίο Αιγυπτιακό μαθηματικό πάπυρο *Rhind* (του 1850 BC περίπου) ζητά να διανεμηθούν 300 καρβέλια ψωμί σε 5 άτομα σύμφωνα με τους εξής κανόνες: το τρίτο άτομο θα πάρει τόσα περισσότερα καρβέλια από το δεύτερο, όσα περισσότερα πήρε το δεύτερο από το πρώτο. Όμοια, κάθε επόμενο άτομο θα πάρει τόσα περισσότερα καρβέλια από το προηγούμενο, όσα περισσότερα πήρε το δεύτερο από το πρώτο. Επίσης, τα τελευταία τρία άτομα μαζί θα πάρουν επτά φορές περισσότερα καρβέλια από τα δύο πρώτα. Πόσα καρβέλια θα πάρει το κάθε άτομο;

Η απάντηση οδηγεί σε αριθμητική πρόοδο.

Ένα δεύτερο πρόβλημα στον ίδιο πάπυρο οδηγεί σε γεωμετρική πρόοδο. Ζητά να βρεθεί ο συνολικός αριθμός από σπίτια, γάτες, ποντίκια και σπόρια αν κάθε σπίτι έχει 7 γάτες, κάθε γάτα έπιασε 7 ποντίκια και κάθε ποντίκι έφαγε 7 σπόρια.

Συστηματική μελέτη αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων υπάρχει στα αρχαία ελληνικά κείμενα. Το θέμα μελετήθηκε από τους αρχαίους Πυθαγορείους οι οποίοι γνώριζαν το τύπο για το άθροισμα των όρων αριθμητικής προόδου. Επίσης, στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη υπάρχει ο τύπος που δίνει το άθροισμα των όρων γεωμετρικής προόδου. Όλα αυτά χρησιμοποιήθηκαν από πολλούς μαθηματικούς, με προεξάρχοντα τον Αρχιμήδη, για να συνάγουν σημαντικά αποτελέσματα σε διάφορους κλάδους των Μαθηματικών.

§3. Μέσοι

Ορισμός. Ο *αριθμητικός μέσος* δύο αριθμών a και b ορίζεται ως

$$m_a = \frac{a + b}{2}.$$

Αν οι a και b είναι ομόσημοι (οπότε $ab \geq 0$) ο *γεωμετρικός τους μέσος* ορίζεται ως

$$m_g = \sqrt{ab}$$

ενώ αν οι a και b είναι μη-μηδενικοί, τότε ο *αρμονικός τους μέσος* ορίζεται ως

$$m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Παραδείγματος χάριν μπορεί να ελέγξει κανείς ότι το πλήθος v των κορυφών ενός κύβου είναι ο αρμονικός μέσος του πλήθους e των ακμών του και f των εδρών του:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{e} + \frac{1}{f}}, \text{ ισοδύναμα } \frac{2}{v} = \frac{1}{e} + \frac{1}{f},$$

το οποίο ισχύει καθώς $\frac{2}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.

Οι παραπάνω τρεις μέσοι, και άλλοι επτά ακόμη, ήσαν γνωστοί στους αρχαίους Πυθαγορείους οι οποίοι τους όρισαν με διαφορετικό αλλά ισοδύναμο τρόπο. Ο αρχικός ορισμός ήταν:

Ορισμός (από την Εισαγωγή *Αριθμητικής του Νικομάχου*). Ο αριθμητικός μέσος (m_a), ο γεωμετρικός μέσος (m_g) και ο αρμονικός μέσος (m_h) δύο αριθμών a και b είναι ο αριθμός ο οποίος ικανοποιεί τις

$$\frac{a - m_a}{m_a - b} = \frac{a}{a} ; \frac{a - m_g}{m_g - b} = \frac{a}{m_g} \text{ και } \frac{a - m_h}{m_h - b} = \frac{a}{b} ,$$

αντίστοιχα.

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι ανά δύο ορισμοί των τριών μέσων είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Αν $\frac{a - m_a}{m_a - b} = 1$, όπως στον ορισμό του αριθμητικού μέσου από τους

Πυθαγορείους, έχουμε $a - m_a = m_a - b$, και άρα $a + b = 2m_a$. Από εκεί έπεται αμέσως ο πρώτος ορισμός του m_a . Το αντίστροφο έπεται με αναστροφή των βημάτων.

Αν αρχίσουμε από την $\frac{a - m_g}{m_g - b} = \frac{a}{m_g}$, έχουμε $(a - m_g)m_g = a(m_g - b)$, άρα $m_g^2 = ab$,

και άρα $m_g = \sqrt{ab}$. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι απλή.

Αν θεωρήσουμε ότι $\frac{a - m_h}{m_h - b} = \frac{a}{b}$, έχουμε $(a - m_h)b = a(m_h - b)$, άρα $2ab = am_h + bm_h$.

Διαιρώντας το τελευταίο δια ab έχουμε $2 = \frac{m_h}{b} + \frac{m_h}{a}$, το οποίο δίνει $m_h = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}$.

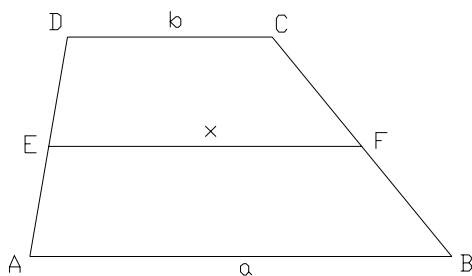
Αντιστρέφοντας τα βήματα, ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι ο αριθμητικός, ο γεωμετρικός και ο αρμονικός μέσος έχουν γεωμετρικές ερμηνείες. Η περιγραφή γίνεται στα επόμενα προβλήματα.

Πρόβλημα 7. Σε ένα τραπέζιο ABCD με βάση AB και την παράλληλή της CD, θέτουμε $AB = a$ και $CD = b$. Αν E και F είναι τα μέσα των AD και CD, αντίστοιχα, (οπότε η EF είναι παράλληλη στην AB) και αν θέσουμε $EF = x$, τότε ισχύει

$$x = EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a + b}{2} \text{ (βλ. Σχήμα 1).}$$

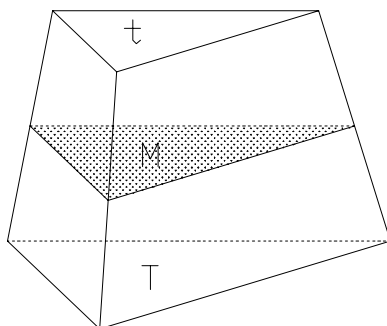
Σχήμα 1



Πρόβλημα 8. Θεωρούμε μια κόλουμερη πυραμίδα. Δείξτε ότι η τετραγωνική ρίζα του εμβαδού M της τομής η οποία ισαπέχει από τις δύο βάσεις (στο Σχήμα 2 οι βάσεις και η τομή εμφανίζονται ως τριγωνικές) είναι ο αριθμητικός μέσος των τετραγωνικών

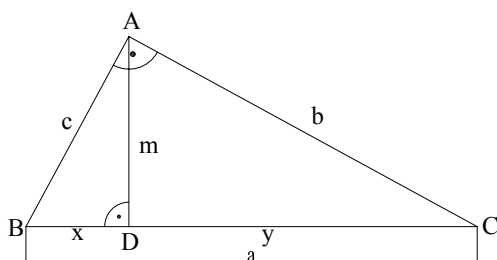
ριζών των εμβαδών T και t των δύο βάσεων: $\sqrt{M} = \frac{\sqrt{T} + \sqrt{t}}{2}$.

Σχήμα 2



Πρόβλημα 9. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το ύψος επί την υποτείνουσα είναι ο γεωμετρικός μέσος των δύο τμημάτων στα οποία διαιρείται η υποτείνουσα από το ίχνος του ύψους αυτού (Σχήμα 3).

Σχήμα 3

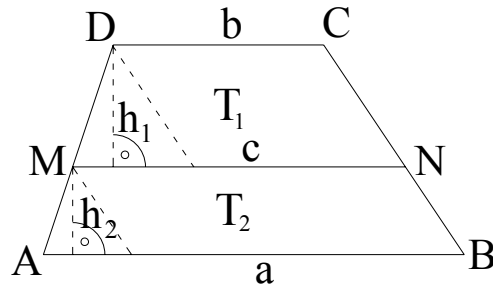


Πρόβλημα 10. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η κάθε κάθετος πλευρά είναι ο γεωμετρικός μέσος της προβολής της στην υποτείνουσα και της υποτείνουσας (Σχήμα 3).

Πρόβλημα 11. Έστω c το μήκος ενός τμήματος MN το οποίο είναι παράλληλο στις δύο βάσεις ενός τραπέζιου $ABCD$ του οποίου οι βάσεις έχουν μήκη a και b , αντίστοιχα (Σχήμα 4). Αν το MN διαιρεθεί το τραπέζιο σε δύο τμήματα T_1 , T_2 ίσου

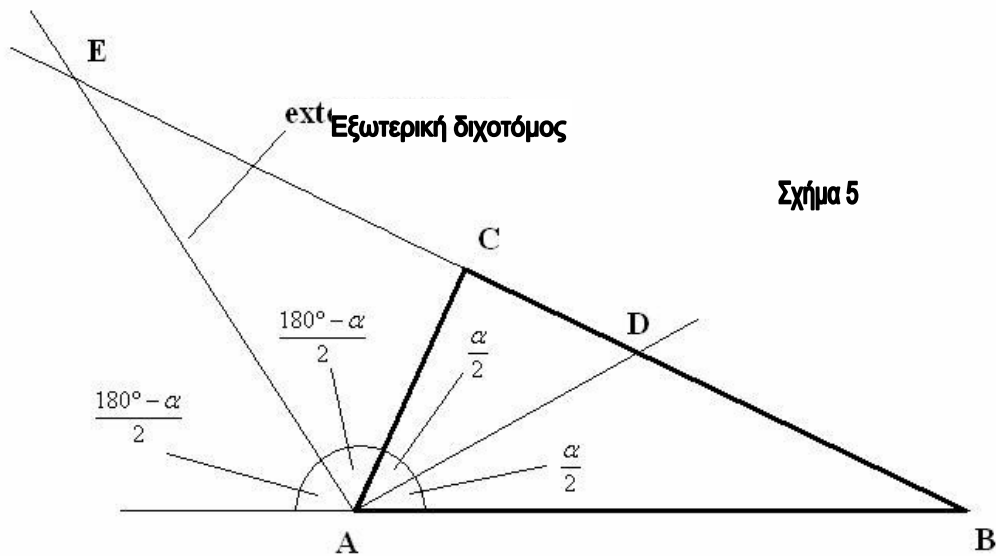
εμβαδού ($T_1 = T_2$), δείξτε ότι $c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Σχήμα 4



Πρόβλημα 12. Έστω D και E τα σημεία τομής, αντίστοιχα, της εσωτερικής και της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A ενός τριγώνου ABC με την πλευρά BC. Δείξτε ότι έχουμε τέσσερα αρμονικά σημεία (Σχήμα 5), δηλαδή ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{2}{BC} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{BE}.$$



Σχήμα 5

Πρόβλημα 13. Σε ένα τραπέζιο ABCD, όπου AB και CD οι παράλληλες βάσεις, θεωρούμε την EF παράλληλη στις βάσεις (όπου E επί της AD και F επί της BC) και η οποία περιέχει το σημείο τομής H των διαγωνίων AC και BD. Δείξτε ότι το μήκος EF είναι το αρμονικό μέσο των AB και CD:

$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$

§4. Πρόοδοι ξανά

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε από τον ορισμό ότι οποιοδήποτε τρεις διαδοχικοί όροι, a_{n-1} , a_n , a_{n+1} αριθμητικής προόδου ικανοποιούν την σχέση

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Αντίστροφα, αν οι όροι μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιούν την σχέση αυτή για κάθε $n > 1$, τότε αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Σε μερικά προβλήματα είναι βολικό, για λόγους συμμετρίας, να γράφουμε τρεις διαδοχικούς όρους a_{n-1} , a_n , a_{n+1} , αριθμητικής προόδου στη μορφή $a - r$, a , $a + r$. Επίσης παρατηρείστε ότι σε μία αριθμητική πρόοδο, αν θέσουμε $a_1 = a$ και $a_2 = a + r$, τότε έχουμε $a_3 = a + 2r$, $a_4 = a + 3r$, $a_5 = a + 4r$ και γενικά $a_n = a + (n-1)r$. Από αυτό έχουμε επίσης τις σχέσεις

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$$

(*)

Πρόβλημα 14. Δείξτε την ακόλουθη ταυτότητα για οποιουδήποτε τρεις "ισαπέχοντες όρους" a_{n-k} , a_n , a_{n+k} αριθμητικής προόδου:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Πρόβλημα 15. Δείξτε ότι το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δίνεται από την σχέση

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}$$

(η τελευταία γράφεται επίσης $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}r$).

(Υπόδειξη: Γράψτε σε μία γραμμή το $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ και από κάτω του τους ίδιους όρους αλλά σε αντίστροφη σειρά

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

και τώρα κάντε χρήση της (*).)

Πρόβλημα 16. Δείξτε ότι

$$a) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$b) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε από τον ορισμό ότι οποιοδήποτε τρεις διαδοχικοί όροι, a_{n-1} , a_n , a_{n+1} γεωμετρικής προόδου ικανοποιούν την σχέση

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$$

Αντίστροφα, αν οι όροι μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιούν την σχέση αυτή για κάθε $n > 1$, τότε αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Σε μερικά προβλήματα είναι βολικό, για λόγους συμμετρίας, να γράφουμε τρεις διαδοχικούς όρους a_{n-1} , a_n , a_{n+1} , γεωμετρικής προόδου στη μορφή a/r , a , ar . Επίσης παρατηρείστε ότι σε μία γεωμετρική πρόοδο,

αν θέσουμε $a_1 = a$ και $a_2 = ar$, τότε έχουμε $a_3 = ar^2$, $a_4 = ar^3$, $a_5 = ar^4$ και γενικά $a_n = ar^{n-1}$.

Πρόβλημα 17. Αποδείξτε την ακόλουθη ταυτότητα για οποιουσδήποτε τρεις "ισαπέχοντες όρους" a_{n-k} , a_n , a_{n+k} γεωμετρικής προόδου:

$$a_n^2 = a_{n-k} a_{n+k}$$

Πρόβλημα 18. Δείξτε ότι το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δίνεται από την σχέση

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

(Υπόδειξη: Έχουμε $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ και άρα $rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n$. Αφαιρέστε τώρα κατά μέλη τις δύο.)

Πρόβλημα 19. Αποδείξτε ότι σε κάθε γεωμετρική πρόοδο το γινόμενο P_n των n πρώτων όρων δίνεται από την σχέση

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = a^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε από τον ορισμό ότι οποιοιδήποτε τρεις μη-μηδενικοί διαδοχικοί όροι, a_{n-1} , a_n , a_{n+1} αρμονικής προόδου ικανοποιούν την σχέση

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Αντίστροφα, αν οι όροι μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με μη-μηδενικούς όρους ικανοποιούν την σχέση αυτή για κάθε $n > 1$, τότε αποτελούν αρμονική πρόοδο.

Σημειώνουμε ότι, στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο, είναι ουσιαστικό να θεωρήσουμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι μη-μηδενικοί. Παραδείγματος χάριν, έστω ότι ξεκινάμε με τους όρους $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 12$ οι οποίοι αποτελούν αρμονική πρόοδο (δείτε την Παράγραφο 3) και ας προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε λίγους ακόμη επόμενους όρους. Ο υπολογισμός του a_4 από την $\frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}$ δίνει $\frac{1}{a_4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$. Όμως η μετάβαση στον a_5 από την

$$\frac{2}{a_4} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5}, \text{ δίνει } \frac{1}{a_5} = \frac{2}{24} - \frac{1}{12} = 0, \text{ το οποίο είναι αδύνατον.}$$

Ας δούμε πώς μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα.

Έστω a ο πρώτος όρος της αρμονικής προόδου και $a+r$ ο δεύτερος. Από την σχέση

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

εύκολα βλέπουμε ότι

$$a_1 = a = \frac{a(a+r)}{a+r}, a_2 = a+r = \frac{a(a+r)}{a}, a_3 = \frac{a(a+r)}{a-r}, a_4 = \frac{a(a+r)}{a-3r},$$

$$a_5 = \frac{a(a+r)}{a-4r}$$

και, γενικά,

$$a_n = \frac{a(a+r)}{a+(2-n)r}.$$

Οπότε, για να αποφύγουμε μηδενικό παρονομαστή, *πρέπει το a να μην είναι θετικό πολλαπλάσιο του r* (αλλιώς ο παρονομαστής $a+(2-n)r$ θα είναι 0 για την τιμή του n για την οποία $a = (n-2)r$.)

Αν εξετάσουμε το προηγούμενο παράδειγμα αρμονικής προόδου με αρχικούς όρους 6, 8, 12 έχουμε $a = 6$, $r = 2$ οπότε ο a είναι θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του r , όπως αναμενόταν. Αν, αντίθετα, στην θέση της εξετάσουμε την αρμονική πρόοδο με αρχικούς όρους 12, 8, 6 έχουμε $a = 12$, $r = -4$ οπότε ο a δεν είναι θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του r . Αυτό σημαίνει ότι θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε όσους όρους της αρμονικής προόδου επιθυμούμε.

Πρόβλημα 20. Αποδείξτε την ακόλουθη ταυτότητα για οποιουσδήποτε τρεις "ισαπέχοντες όρους" a_{n-k} , a_n , a_{n+k} αρμονικής προόδου:

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-k}} + \frac{1}{a_{n+k}}$$

Πρόβλημα 21. Αποδείξτε ότι το άθροισμα R_n των πρώτων n όρων αρμονικής προόδου ικανοποιεί

$$R_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{n(2a + (3-n)r)}{2a(a+r)}.$$

Πρόβλημα 22. Να βρεθούν οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν αυτές αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Λύση. Έστω ότι οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι $b-r$, b , και $b+r$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $(b+r)^2 = b^2 + (b-r)^2$, που δίνει $b = 4r$. Άρα οι πλευρές είναι ίσες με $3r$, $4r$, $5r$. (Πυθαγόρειες τριάδες της μορφής $3r$, $4r$, $5r$ ήσαν γνωστές από την αρχαιότητα. Εμφανίζονται σε Μεσοποταμιακές πινακίδες μαθηματικού περιεχομένου.)

Πρόβλημα 23. Έστω ότι οι πλευρές ενός τριγώνου είναι σε αριθμητική πρόοδο. Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο αν και μόνον αν η διαφορά των πλευρών του (ως αριθμητική πρόοδος) ισούται με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

Λύση. Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε οι πλευρές του, σύμφωνα με το προηγούμενο πρόβλημα, είναι της μορφής $3x$, $4x$, $5x$. Τώρα, η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου συναρτήσει του εμβαδού A και της ημιπεριμέτρου p του

τριγώνου ικανοποιεί $r = \frac{A}{p} = \frac{\frac{3x \cdot 4x}{2}}{\frac{3x + 4x + 5x}{2}} = x$. Άρα $r = x = 4x - 3x = 5x - 4x$, όπως

θέλαμε να δείξουμε.

Αντίστροφα, έστω ότι οι πλευρές του τριγώνου βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο με διαφορά ίση προς την ακτίνα r του εγγεγραμμένου κύκλου. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε τις πλευρές στη μορφή $b - r$, b , και $c = b + r$, οπότε το εμβαδόν του A δίνεται από την σχέση $A = pr$ όπου, εδώ, η ημιπερίμετρος $p = \frac{3b}{2}$. Από τον τύπο του

Ήρωνα έχουμε $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, οπότε

$$\left(\frac{3br}{2}\right)^2 = \frac{3b}{2} \left(\frac{b}{2} - r\right) \left(\frac{b}{2}\right) \left(\frac{b}{2} + r\right).$$

Μετά τις απλοποιήσεις έχουμε $3r^2 = \frac{b^2 - 4r^2}{4}$, άρα $b^2 = 16r^2$, και άρα $b = 4r$.

Συμπεραίνουμε ότι έχουμε $a = 3r$, $b = 4r$ και $c = 5r$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Πρόβλημα 24. Έστω ότι τα τετράγωνα των πλευρών ενός τριγώνου βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο. Δείξτε ότι τα τετράγωνα των διαμέσων του τριγώνου επίσης βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο. Ισχύει το αντίστροφο;

(Υπόδειξη: Η διάμεσος m_a από την κορυφή A ικανοποιεί $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.)

Πρόβλημα 25. Έστω οι ακολουθίες:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37...

4, 15, 26, 37, 48, 59, ...

Βρείτε τους κοινούς όρους των δύο ακολουθιών και αποδείξτε ότι αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Γενικεύστε το πρόβλημα!

Πρόβλημα 26. Έστω ακολουθία με όρους $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος αν και μόνον αν

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \text{ για κάθε } n.$$

Λύση. Αν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος, έχουμε

$$a_2 = a_1 + r, a_3 = a_2 + r, \dots, a_n = a_{n-1} + r,$$

και άρα

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right), \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right), \dots, \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right),$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} \right) \\
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{a_1 + (n-1)r - a_1}{a_1 a_n} \right) \\
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{(n-1)r}{a_1 a_n} \right) = \frac{n-1}{a_1 a_n}
 \end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι η δοθείσα σχέση ισχύει για κάθε n . Ειδικά για $n=3$ έχουμε $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3}$, δηλαδή ότι $a_1 + a_3 = 2a_2$ ή $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$. Θέτουμε

τώρα $r = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$, οπότε $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$.

Έστω ότι έχουμε δείξει ότι $a_k = a_{k-1} + r$ (και άρα $a_k = a_1 + (k-1)r$) για όλα τα $k < n$ (στα παραπάνω το έχουμε δείξει αυτό για $n = 4$). Θα δείξουμε ότι ισχύει η ανάλογη ισότητα για $k = n$. Πράγματι, από την δοθείσα σχέση έχουμε

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

Αντικαθιστώντας τους πρώτους $n-1$ όρους του αριστερού μέλους με το ίσο τους λαμβάνουμε

$$\frac{n-2}{a_1 a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

και άρα $(n-2)a_n + a_1 = (n-1)a_{n-1}$ ή $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1} - a_1$ η οποία γράφεται ως $(n-2)a_n = (n-2)a_{n-1} + a_{n-1} + a_1$. Από την $a_{n-1} = a_1 + (n-2)r$ παίρνουμε

$$(n-2)a_n = (n-2)a_{n-1} + a_1 + (n-2)r - a_1, \text{ και άρα } a_n = a_{n-1} + r.$$

Συνεπώς ο τελευταίος όρος της ακολουθίας βρίσκεται στην ίδια αριθμητική πρόοδο όπως οι πρώτοι $n-1$. Με άλλα λόγια, η αριθμητική πρόοδος a_1, a_2, a_3 συνεχίζει με το όρο a_4 , κατόπιν (επαναλαμβάνοντας την διαδικασία) με το a_5 και ούτω καθ' εξής.

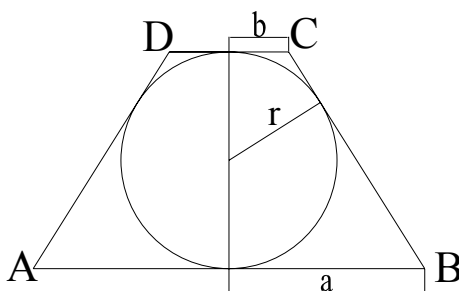
Πρόβλημα 27. Δύο νεαροί έκαναν αίτηση σε μία εταιρεία, για δουλειά. Στην συνέντευξη που ακολούθησε τους έθεσαν το εξής ερώτημα, για να ελέγξουν τις διανοητικές τους ικανότητες:

Αν ο εργοδότης μείνει ευχαριστημένος από την εργασία τους, θα τους δώσει αύξηση του αρχικού μισθού των 1000 ευρώ σύμφωνα με έναν από τους εξής δύο τρόπους: είτε α) αύξηση κατά 15 ευρώ κάθε τέσσερις εβδομάδες, ή β) αύξηση κατά 5 ευρώ κάθε δύο εβδομάδες.

Αν ήσασταν ο ένας από τους δύο, τι θα επιλέγατε; Εξηγήστε την απάντησή σας!

Πρόβλημα 28. Έστω συμμετρικό τραπέζιο στο οποίο εγγράφεται κύκλος και έστω $2a$, $2b$ και r , αντίστοιχα, οι βάσεις του τραpezίου και η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Δείξτε ότι $r^2 = ab$, δηλαδή ότι τα a , b , r βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο (Σχήμα 6).

Σχήμα 6



Πρόβλημα 29. Να βρεθούν οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο.

Λύση. Αν οι πλευρές είναι τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι της μορφής a , ar και ar^2 . Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$a^2 = (ar)^2 + (ar^2)^2, \text{ άρα } 1 = r^2 + r^4, \text{ οπότε } r^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ και άρα } r = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \text{ η}$$

μόνη πραγματική λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Συμπεραίνουμε ότι οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι της μορφής a ,

$$a\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \text{ και } a\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ όπου } a \text{ θετικός.}$$

Πρόβλημα 30. Δείξτε ότι αν:

a, b, c αποτελούν αριθμητική πρόοδο,

b, c, d αποτελούν γεωμετρική πρόοδο και

c, d, e αποτελούν αρμονική πρόοδο,

τότε τα a, c , και e αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Πρόβλημα 31. Η *Μαθηματική Σοκολατοποιία* διαφημίζει μία καινούργια σοκολάτα, η οποία περιέχει ένα κουπόνι. Για κάθε δύο σοκολάτες παίρνει κανείς δωρεάν άλλη μία σοκολάτα (που περιέχει όμοιο κουπόνι). Ποια είναι η αληθινή αξία μιας τέτοιας σοκολάτας;

(Υπόδειξη: Παίρνει κανείς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots$ σοκολάτες. Η ποσότητα αυτή έχει «τελικό άθροισμα» ίσο με 2).

§5. Ακολουθίες που ορίζονται με αναδρομική σχέση

Οι ακολουθίες εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές (π.χ. στις καθημερινές θερμοκρασίες, την ετήσια παραγωγή προϊόντων, κ.λπ.). Συχνά οι ακολουθίες στις εφαρμογές δίνονται από έναν κανόνα ή έναν τύπο ο οποίος δίνει την τιμή κάθε όρου της συναρτήσεως των προηγούμενων όρων. Παραδείγματος χάριν ένας πληθυσμός ή το ποσό σε έναν Τραπεζικό λογαριασμό κάποια δεδομένη στιγμή, εξαρτάται από την τιμή που είχε λίγο νωρίτερα. Τέτοιοι κανόνες, που συνδέουν τους όρους μιας ακολουθίας με τους προηγούμενους όρους, ονομάζονται *αναδρομικές σχέσεις*.

Παραδείγματα ακολουθιών που δίνονται από αναδρομική σχέση συμπεριλαμβάνουν τις αριθμητικές, τις γεωμετρικές και τις αρμονικές προόδους. Πράγματι, ιδού οι κανόνες που συνδέουν κάθε όρο των ακολουθιών αυτών με έναν προηγούμενο:

για αριθμητικές προόδους: $a_{n+1} = a_n + r$, όπου το a_1 δίδεται,

για γεωμετρικές προόδους: $a_{n+1} = a_n r$, όπου το a_1 δίδεται, και

για αρμονικές προόδους: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + r$, όπου το a_1 δίδεται.

Οι πρώτες δύο από αυτές τις αναδρομικές σχέσεις ονομάζονται *γραμμικές* διότι κάθε όρος που εμφανίζεται είναι υψωμένος σε δύναμη 1 (στην τρίτη περίπτωση τα a_n είναι σε δύναμη -1). Λέμε ότι αυτές οι δύο αναδρομικές σχέσεις είναι *πρώτου βαθμού* επειδή ο a_{n+1} συνδέεται με έναν προηγούμενο όρο.

Ίσως η πιο γνωστή ακολουθία που δίνεται αναδρομικά αναφέρεται από τον Fibonacci στο βιβλίο του *Liber Abaci*. Για την ακολουθία αυτή ισχύει $a_{n+2} = a_{n-1} + a_n$. Παρατηρείστε όμως ότι τώρα χρειάζεται να δοθούν οι δύο πρώτοι όροι, a_1 και a_2 , για να γράψουμε και τους υπόλοιπους όρους της ακολουθίας.

Η αναδρομική σχέση του Fibonacci είναι επίσης γραμμική αλλά *δεύτερης τάξης* καθώς κάθε όρος της συνδέεται με δύο προηγούμενους.

Η ακολουθία στο *Liber Abaci* προκύπτει από το ακόλουθο πρόβλημα που έθεσε ο Fibonacci: «Αγόρασε κάποιος ένα ζευγάρι νεογέννητα κουνέλια για να τα εκθρέψει. Το ζευγάρι ενηλικιώθηκε μετά από έναν μήνα και άρχισε να γεννά κάθε μήνα ένα ζευγάρι απογόνους, αρχίζοντας από τον δεύτερο μήνα. Κάθε νέο ζευγάρι ακολουθεί τον ίδιο κύκλο: ενηλικιώνεται τον πρώτο μήνα της ζωής του και αρχίζει να παράγει κάθε μήνα ένα ζευγάρι απογόνους, αρχίζοντας από τον δεύτερο μήνα. Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα υπάρχουν το εκάστοτε μήνα;»

Μπορεί να ελέγξει κανείς ότι θα υπάρχουν:

- 1 ζευγάρι τον πρώτο μήνα
- 1 ζευγάρι τον δεύτερο μήνα
- 2 ζευγάρια τον τρίτο μήνα
- 3 ζευγάρια τον τέταρτο μήνα
- 5 ζευγάρια τον πέμπτο μήνα κ.ο.κ.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν το πλήθος των ζευγαριών τον n -οστο μήνα είναι a_n , τότε $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, και οι δύο πρώτοι όροι είναι $a_1 = 1$ και $a_2 = 1$. Από τις πληροφορίες αυτές λαμβάνουμε την λεγόμενη ακολουθία Fibonacci η οποία ξεκινά από τους όρους

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Πρόβλημα 32. Βρείτε τους επόμενους τρεις όρους της ακολουθίας Fibonacci που αναφέρθηκε παραπάνω

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, _____, _____, _____

Τι μπορούμε να πούμε για τον γενικό όρο της ακολουθίας Fibonacci; Το θέμα είναι λίγο πιο δύσκολο. Για το πως αντιμετωπίζεται αυτό και άλλα ανάλογα είδη ακολουθιών μπορείτε να ανατρέξετε στο κεφάλαιο *Ακολουθίες (Επίπεδο 2)*, παρακάτω.

Κλείνουμε με ένα ακόμη πρόβλημα

Πρόβλημα 33. Να βρεθούν φυσικοί αριθμοί x και y αν οι διωνυμικοί συντελεστές $\binom{x-1}{y-1}$, $\binom{x-1}{y}$ και $\binom{x}{y}$ βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο και, συγχρόνως, οι αριθμοί

A_x^y , A_x^{y+1} και A_{x+1}^{y+1} βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο. Εδώ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ και

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Λύση. Από τον τύπο $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ για τον διωνυμικό συντελεστή και

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ για τον τύπο των αναδιατάξεων, οι δοθείσες σχέσεις γίνονται

$$2\binom{x-1}{y} = \binom{x-y}{y-1} + \binom{x}{y}$$

και

$$(A_x^{y+1})^2 = A_x^y A_{x+1}^{y+1}.$$

Χρειάζεται λοιπόν να επιλύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2 \frac{(x-1)!}{y!(x-y-1)!} = \frac{(x-1)!}{(y-1)!(x-y)!} + \frac{x!}{y!(x-y)!} \\ \left(\frac{x!}{(x-y-1)!} \right)^2 = \frac{x!}{(x-y)!} \frac{(x+1)!}{(x-y)!} \end{cases}$$

με $x-y-1 \geq 0$ και $y-1 \geq 0$, όπου x, y φυσικοί αριθμοί.

Αφού απλοποιήσουμε από την πρώτη εξίσωση τον κοινό παράγοντα

$\frac{(x-1)!}{(y-1)!(x-y-1)!}$ και από την δεύτερη τον $\left(\frac{x!}{(x-y-1)!} \right)^2$, έχουμε

$$\begin{cases} \frac{2}{y} = \frac{1}{x-y} + \frac{x}{y(x-y)} \\ 1 = \frac{x+1}{(x-y)^2} \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{cases} 2(x-y) = y+x \\ (x-y)^2 = x+1 \end{cases}$$

Προκύπτει ότι $x=3y$, $4y^2-3y-1=0$, και μόνη λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς είναι η $x=3$, $y=1$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ανδρέας Φιλίππου, Μάριος Αντωνιάδης

Ευθύγραμμα Τμήματα και Ευθείες

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος είναι μια ευθεία, ημιευθεία ή ένα άλλο τμήμα που είναι κάθετο στο τμήμα στο μέσο του.

Θεώρημα: Εάν ένα σημείο ανήκει στην μεσοκάθετο ενός τμήματος, τότε το σημείο ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

Θεώρημα: Εάν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος, τότε το σημείο ανήκει στην μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος.

Κάθετες ευθείες είναι δύο ευθείες που σχηματίζουν ορθές γωνίες.

Παράλληλες ευθείες: Παράλληλες ευθείες είναι οι συνεπίπεδες ευθείες που δεν τέμνονται.

Μια ευθεία που τέμνει δύο ή περισσότερες συνεπίπεδες ευθείες σε διαφορετικά σημεία καλείται **τέμνουσα ευθεία**.

Γωνίες

Οι γωνίες είναι γεωμετρικά σχήματα που σχηματίζονται από δύο ημιευθείες που με κοινή αρχή. Οι δύο ημιευθείες καλούνται *πλευρές της γωνίας*, και κοινό σημείο τους *κορυφή της γωνίας*.

Οι γωνίες μπορούν να ταξινομηθούν από το μέτρο τους:

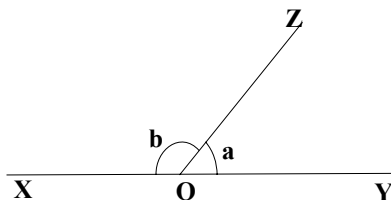
Οι ορθές γωνίες είναι γωνίες με μέτρο 90° .

Οι οξείες γωνίες είναι γωνίες με μέτρο μεταξύ 0° και 90° .

Οι αμβλείες γωνίες είναι γωνίες με μέτρο μεταξύ 90 και 180° .

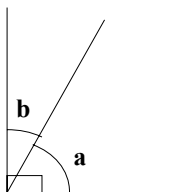
Οι ευθείες γωνίες είναι γωνίες με μέτρο 180° .

Παραπληρωματικές γωνίες **a** και **b** που έχουν κοινή κορυφή **O** και κοινή πλευρά **OZ** άλλα οι δύο άλλες πλευρές **OX** και **OY** είναι αντικείμενες ημιευθείες.

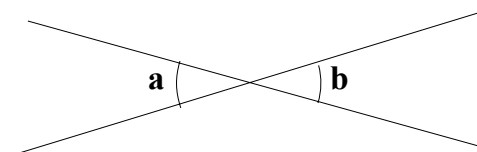


Το άθροισμα των παραπληρωματικών γωνιών είναι ίσο με 180° .

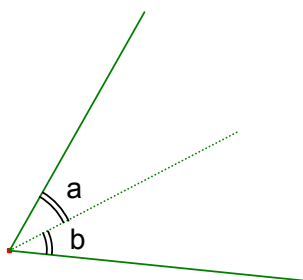
Οι συμπληρωματικές γωνίες είναι δύο γωνίες τα των οποίων τα μέτρα έχουν άθροισμα 90° .



Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες με κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες:



Διχοτόμος μιας γωνίας είναι μια ημιευθεία η οποία διαιρεί τη γωνία σε δύο ίσα μέρη.



Ιδιότητα διχοτόμου γωνίας: οποιοδήποτε σημείο μιας διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Αξίωμα: Εάν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τέμνουσα, τότε οι εντός εκτός και επί αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.

Θεώρημα: Εάν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τέμνουσα, τότε οι εντός και εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

Θεώρημα: Εάν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τέμνουσα, τότε οι εντός και επί τα μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Θεώρημα: Εάν η τέμνουσα είναι κάθετος σε μια από τις δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετος και στην άλλη.

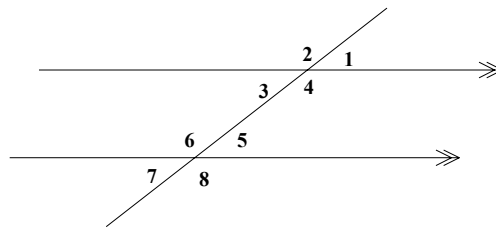
Αξίωμα: Εάν δύο ευθείες τέμνονται από τέμνουσα και οι εντός και εναλλάξ γωνίες τους είναι ίσες, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Θεώρημα: Εάν δύο ευθείες τέμνονται από τέμνουσα και εντός και εναλλάξ γωνίες τους είναι ίσες τότε, οι ευθείες είναι παράλληλες.

Θεώρημα: Εάν δύο ευθείες τέμνονται από τέμνουσα και εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές τότε, οι ευθείες είναι παράλληλες.

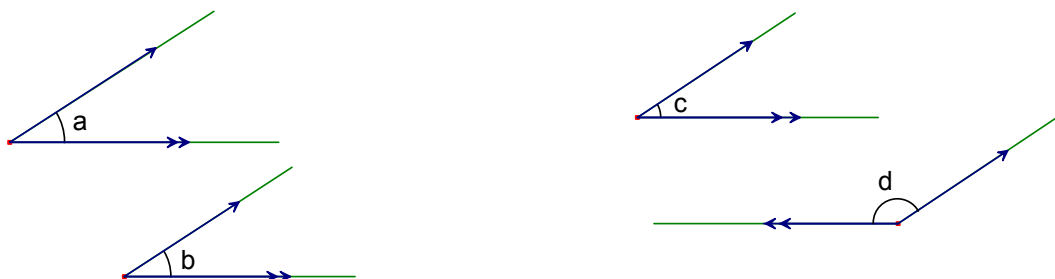
Θεώρημα: Σε ένα επίπεδο, εάν δύο ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Στη τομή δύο παράλληλων ευθειών γραμμών από μια τρίτη ευθεία, σχηματίζονται οκτώ γωνίες:

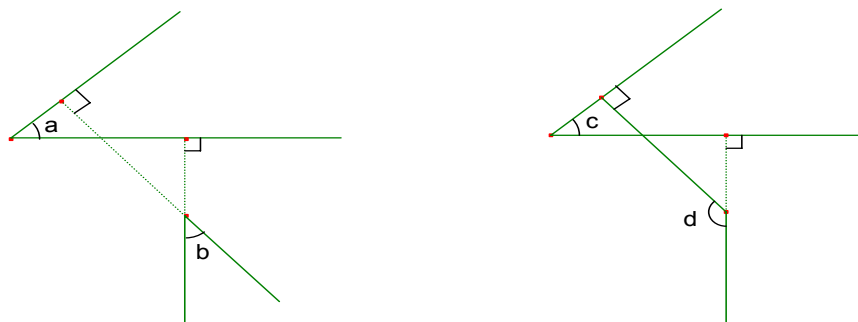


- i) Εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες (1 και 5, 2 και 6, 3 και 7, 4 και 8). Αυτά τα ζευγάρια γωνιών είναι ίσα: ($\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$)
- ii) Εντός και εναλλάξ γωνίες (4 και 5, 3 και 6) είναι ίσες.
- iii) Εκτός και εναλλάξ (1 και 7, 2 και 8) είναι ίσες.
- iv) Οι εντός γωνίες (3 και 5, 4 και 6) έχουν άθροισμα ίσο με 180° ($\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$, $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$)
- v) Εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες (1 και 8, 2 και 7) έχουν άθροισμα 180° ($\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$).

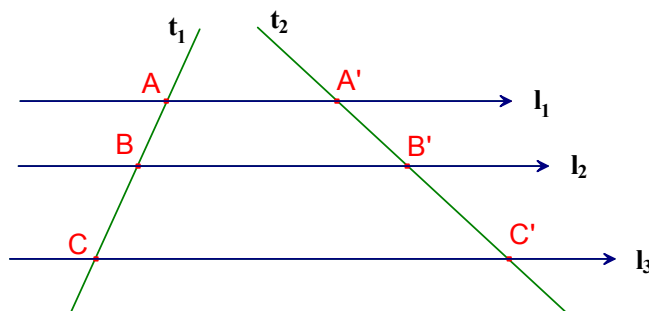
Οι γωνίες οι οποίες έχουν αντίστοιχα **παράλληλες πλευρές** τότε είτε είναι ίσες μεταξύ τους (εάν και οι δύο είναι οξείες ή και οι δύο είναι αμβλείες, ή το άθροισμα τους είναι 180° ($\angle c + \angle d = 180^\circ$).



Οι γωνίες οι οποίες έχουν **αντίστοιχα κάθετες πλευρές** είτε είναι ίσες μεταξύ τους (εάν και οι δύο είναι οξείες ή και οι δύο είναι αμβλείες), ή το άθροισμα τους είναι 180° .



Θεώρημα του Θαλή. Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ιδιότητες:

- Από ένα σημείο εκτός ευθείας, άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.
- Από ένα σημείο εκτός ευθείας, άγεται μια ευθεία κάθετη προς αυτή.
- Εάν δύο ευθείες είναι παράλληλες σε μια τρίτη ευθεία τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- Εάν τρεις παράλληλες ευθείες τέμνονται σε ίσα τμήματα από μια τέμνουσα τότε, τέμνουν σε ίσα τμήματα κάθε άλλη τέμνουσα τους.

Πόρισμα: Μια ευθεία που περνά από το μέσο σε μια από τις πλευρές ενός τριγώνου και είναι παράλληλη σε μια άλλη πλευρά τότε διχοτομεί την τρίτη πλευρά του τριγώνου.

Τρίγωνα

Βασικές ιδιότητες των τριγώνων. Σε τυχαίο τρίγωνο:

- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.
- Οι γωνίες, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές, είναι επίσης ίσες, και αντίστροφα.
 - Ειδικότερα, όλες οι γωνίες σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι ίσες.
- Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με 180° .

- Το μέτρο οποιασδήποτε εξωτερικής γωνίας σε ένα τρίγωνο είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
- Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους ($\alpha < \beta + \gamma$, $\alpha > \beta - \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\beta > \alpha - \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$, $\gamma > \alpha - \beta$).

Ίσα τρίγωνα

Θεωρήματα για την ισότητα τριγώνων.

Δύο τρίγωνα είναι ίσα, εάν έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν ίσες:

- α) δύο πλευρές μια προς μια και τις περιεχόμενες γωνίες.
- β) μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες μια προς μια.
- γ) τρεις πλευρές μια προς μια.

Θεωρήματα ισότητας των ορθογώνιων τριγώνων.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, εάν ισχύουν ένα από τα παρακάτω κριτήρια:

- α) έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- β) έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία.
- γ) έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.
- δ) έχουν την κάθετη πλευρά και την προσκείμενη οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.
- ε) έχουν μια κάθετη πλευρά και την απέναντι οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.

Θεώρημα: Εάν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες τότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες. .

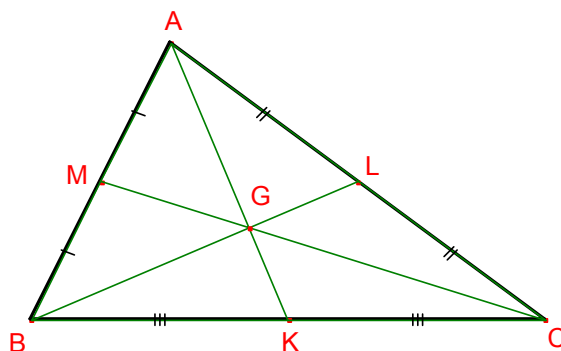
Πόρισμα: Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κάθετος στην απέναντι πλευρά και περνά από το μέσο της.

Θεώρημα: Εάν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε οι απέναντι πλευρές από τις γωνίες αυτές είναι ίσες.

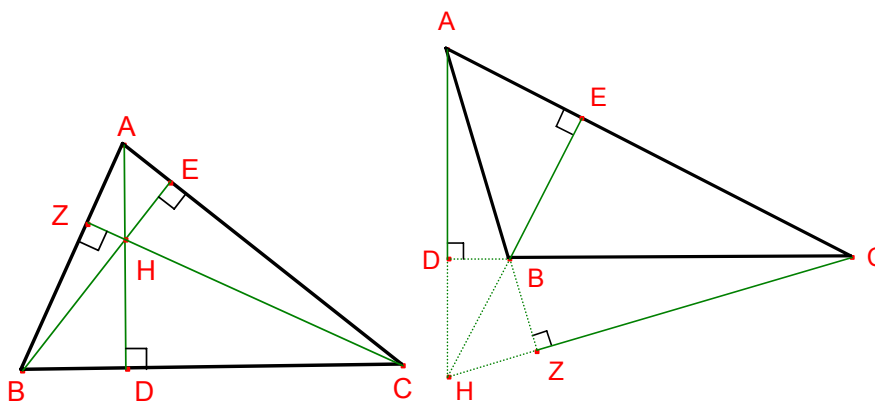
Θεώρημα: Εάν δύο γωνίες και η μη-περιεχόμενη πλευρά ενός τριγώνου σε αυτές είναι ίσες με δύο γωνίες και τη μη-περιεχόμενη σε αυτές πλευρά ενός άλλου τριγώνου τότε, τα τρίγωνα είναι ίσα.

Διάμεσος τριγώνου ονομάζουμε είναι το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει οποιοδήποτε κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

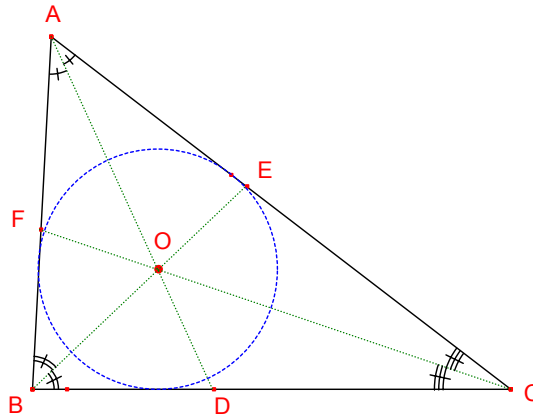
Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν (τέμνονται σε ένα σημείο) στο G (το οποίο βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου), το οποίο είναι κέντρο βάρους αυτού του τριγώνου. Το σημείο αυτό διαιρεί κάθε διάμεσο με την αναλογία 2:1.



Το ύψος ενός τριγώνου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρουμε από οποιοδήποτε κορυφή του, στην απέναντι πλευρά (ή στη προέκτασή της). Τα τρία ύψη του τριγώνου τέμνονται πάντα σε ένα σημείο, το οποίο καλείται ορθόκεντρο του τριγώνου. Το ορθόκεντρο ενός οξυγωνίου τριγώνου, έστω σημείο H , ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου και το ορθόκεντρο ενός αμβλυγώνιου τριγώνου, σημείο H , βρίσκεται έξω από το τρίγωνο και το ορθόκεντρο ενός ορθογώνιου τριγώνου ταυτίζεται με την κορυφή της ορθής.

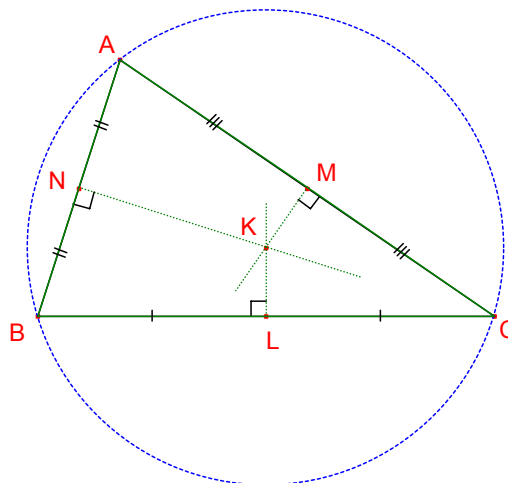


Διχοτόμος τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή μέχρι το σημείο της τομής με την απέναντι πλευρά. Οι τρεις διχοτόμοι ενός τριγώνου (AD , BE , CF) τέμνονται σε ένα σημείο (το οποίο ανήκει πάντοτε στο εσωτερικό), το οποίο είναι το κέντρο του εγγραμμένου κύκλου

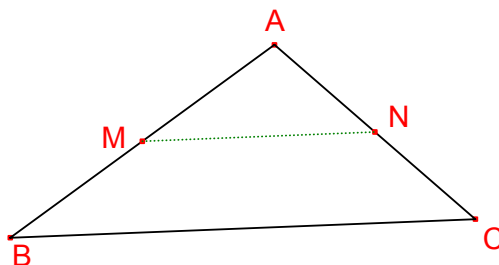


Η διχοτόμος διαιρεί την απέναντι πλευρά σε δύο μέρη, ανάλογα προς τις προσκείμενες πλευρές π.χ. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Μεσοκάθετος τριγώνου καλείται η κάθετος ευθεία, που φέρουμε στο μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου. Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου ABC, κάθε μια που φέρεται από το μέσο της κάθε πλευράς του, τέμνονται σε ένα σημείο K, το οποίο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.



Θεώρημα: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου:



- α) Είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά.
- β) Το μήκος του είναι το μισό μήκος της τρίτης πλευράς.

Ορθογώνια τρίγωνα

Θεώρημα: Το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Πυθαγόρειο θεώρημα. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο του τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών.

Θεώρημα: Εάν το τετράγωνο μιας πλευράς ενός τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δυο πλευρών του, τότε το τρίγωνο αυτό είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Θεώρημα: Εάν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο.

Θεώρημα: Εάν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ένα οξυγώνιο τρίγωνο.

Θεώρημα: (Τριγωνική Ανισότητα): Το άθροισμα των μηκών δυο οποιωνδήποτε πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το μήκος της τρίτης πλευράς.

Θεώρημα: Εάν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου, αλλά η περιεχόμενη γωνία του πρώτου τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη περιεχόμενη γωνία του δεύτερου τριγώνου τότε, η τρίτη πλευρά του πρώτου τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη τρίτη πλευρά του δεύτερου τριγώνου.

Θεώρημα: Εάν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου, αλλά η τρίτη πλευρά του πρώτου τριγώνου είναι μεγαλύτερη από η τρίτη πλευρά του δεύτερου τριγώνου τότε, η περιεχόμενη γωνία του πρώτου τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη περιεχόμενη γωνία του δεύτερου τριγώνου.

Λόγοι, αναλογίες και ομοιότητα

Όμοια τρίγωνα:

Αξίωμα: Εάν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες με δύο γωνίες ενός άλλου τριγώνου τότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

Θεώρημα: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μια προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Θεώρημα: Εάν οι πλευρές δύο τριγώνων είναι ανάλογες, τότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

Θεώρημα: Εάν φέρουμε μια ευθεία παράλληλη σε μια από τις πλευρές ενός τριγώνου η οποία τέμνει τις άλλες δύο πλευρές τότε, η ευθεία διαιρεί εκείνες τις πλευρές σε μέρη ανάλογα.

Πόρισμα: Εάν τρεις παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο τέμνουσες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται σε αυτές είναι ανάλογα.

Θεώρημα: (Θεώρημα των διχοτόμων): Εάν μια ευθεία διχοτομεί μια γωνία ενός τριγώνου, τότε διαιρεί την απέναντι πλευρά της γωνίας σε τμήματα ανάλογα προς τις άλλες δύο πλευρές.

Γεωμετρικό μέσος: Ο γεωμετρικός μέσος δύο αριθμών x και z ορίζεται ως $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$.

και το y καλείται γεωμετρικός μέσος του x και του z .

Θεώρημα: Το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε προς την υποτείνουσα, χωρίζει το ορθογώνιο τρίγωνο σε δύο τρίγωνα που είναι όμοια μεταξύ τους και όμοια με το αρχικό.

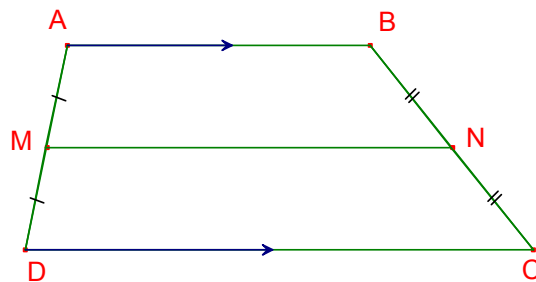
Πόρισμα 1: Όταν φέρουμε το ύψος από την ορθή γωνιά προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε το ύψος ο γεωμετρικός μέσος των τμημάτων που χωρίζεται η υποτείνουσα από αυτό το ύψος.

Πόρισμα 2: Όταν φέρουμε το ύψος από την ορθή γωνιά προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου τότε, κάθε κάθετος πλευρά είναι ο γεωμετρικός μέσος της υποτείνουσας και του τμήματος της υποτείνουσας που ορίζεται από το ίχνος του ύψους με την κορυφή του τριγώνου που ανήκει σε αυτή τη κάθετο.

Σχέση των μηκών των πλευρών τυχαίου τριγώνου.

Γενική περίπτωση (για οποιοδήποτε τρίγωνο) έχουμε: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Τραπεζίο είναι το τετράπλευρο, του οποίου δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.



Στο πιο πάνω σχήμα είναι $AB \parallel DC$. Οι παράλληλες πλευρές καλούνται **βάσεις** του τραπεζίου.

Το τμήμα MN , όπου τα σημεία M και N είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του τραπεζίου καλείται **διάμεσος** του τραπεζίου.

- Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το ημίθροισμα των δύο βάσεων του.

$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

και είναι παράλληλος με τις δύο βάσεις του: $MN \parallel AB \parallel DC$.

ΚΥΚΛΟΙ

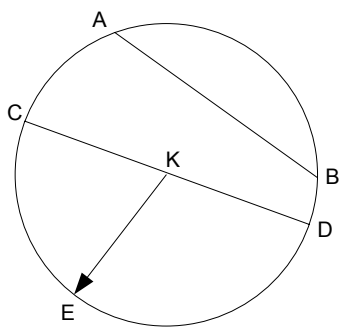
Κύκλος καλείται ένα σύνολο σημείων σε ένα επίπεδο που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο.

Το σταθερό σημείο καλείται **κέντρο** του κύκλου και η απόσταση του συνόλου σημείων από το σταθερό σημείο καλείται η **ακτίνα** του κύκλου.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το κέντρο του κύκλου με σημείο πάνω στον κύκλο καλείται επίσης **ακτίνα**.

Ένα τμήμα που ενώνει δύο σημεία σε έναν κύκλο καλείται **χορδή**.

Μια χορδή που περνά από το κέντρο καλείται **διάμετρος**.



KE, KC, KD : Ακτίνες
AB, CD : Χορδές
EF : Διάμετρος

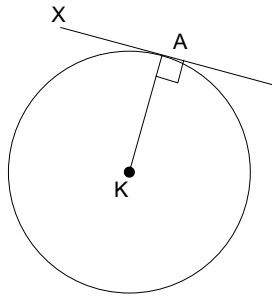
Η Διάμετρος ενός κύκλου ισούται με δύο φορές την ακτίνα.

Εάν φέρουμε ένα κύκλο γύρω από ένα πολύγωνο, και αν όλες οι κορυφές του πολυγώνου ανήκουν στον κύκλο, τότε λέμε ο κύκλος είναι **περιγεγραμμένος** στο πολύγωνο.

Εάν ένα πολύγωνο κατασκευάζεται μέσα σε έναν κύκλο όπου όλες οι κορυφές του πολυγώνου ανήκουν στον κύκλο, τότε λέμε ότι το πολύγωνο είναι **εγγραμμένο σε έναν** κύκλο.

Εφαπτόμενες

Εφαπτομένη ενός κύκλου είναι μια ευθεία στο ίδιο επίπεδο με τον κύκλο και η οποία τέμνει τον κύκλο σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο καλείται σημείο επαφής.



A: Σημείο επαφής

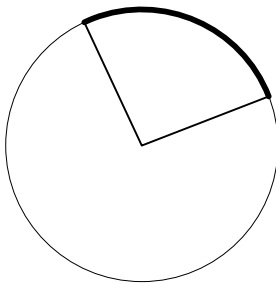
XY: Εφαπτομένη του κύκλου (K,KA)

Θεώρημα: Εάν μια ευθεία είναι εφαπτομένη σε έναν κύκλο τότε η ακτίνα είναι κάθετη στη ευθεία στο σημείο επαφής.

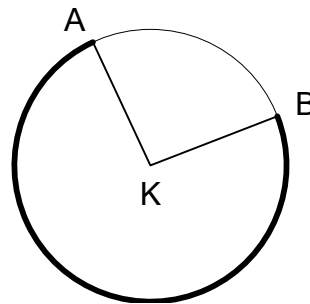
Θεώρημα: Εάν μια ευθεία είναι κάθετη στην ακτίνα ενός κύκλου σε σημείο του κύκλου τότε η ευθεία είναι εφαπτομένη στον κύκλο.

Ευθεία που είναι εφαπτομένη σε δύο συνεπίπεδους κύκλους καλείται **κοινή εφαπτομένη**.

Τόξα



$\widehat{AB}$: Κυρτό τόξο AB



$\widehat{AB}$: Μη Κυρτό τόξο AB

Μια γωνία λέγεται **επίκεντρη** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Επίκεντρη γωνία ενός τόξου είναι η επίκεντρη γωνία του κύκλου της οποίας οι πλευρές τέμνουν τον κύκλο στα άκρα του τόξου.

- Το μέτρο ενός κυρτού τόξου είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας του.

Τόξα και χορδές

Θεώρημα: Σε ίσους κύκλους ή στον ίδιο κύκλο:

- Σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές.
- Σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Θεώρημα: Μια διάμετρος που είναι κάθετη σε μια χορδή διχοτομεί την χορδή και το αντίστοιχο τόξο στη χορδή.

A

Θεώρημα: Σε ίσους κύκλους ή στους ίδιους κύκλους:

B

- i) Οι χορδές που απέχουν εξίσου από το κέντρο (ή τα κέντρα) είναι ίσες.
- ii) Οι ίσες χορδές απέχουν εξίσου από το κέντρο (ή τα κέντρα).

Γωνίες και ευθύγραμμα τμήματα

Εγγραμμένη γωνία είναι η γωνία της οποίας η κορυφή ανήκει στον κύκλο και οι πλευρές της περιέχουν τις χορδές του κύκλου.

Θεώρημα: Το μέτρο μιας εγγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

Πόρισμα: Εάν δύο εγγραμμένες γωνίες βαίνουν στο ίδιο τόξο, τότε οι γωνίες είναι ίσες.

Πόρισμα: Εάν τετράπλευρο είναι εγγραμμένο σε κύκλο, τότε οι απέναντι γωνίες του τετράπλευρου είναι παραπληρωματικές.

Πόρισμα: Μια γωνία που είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή γωνία.

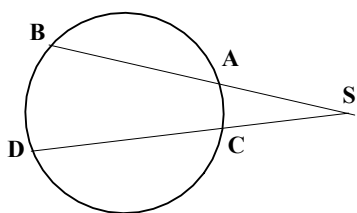
Θεώρημα: Η γωνία που σχηματίζεται από δύο τεμνόμενες χορδές μέσα σε έναν κύκλο είναι ίσο με το μισό του αθροίσματος των δύο απέναντι τόξων που ορίζουν.

Γωνίες και τμήματα

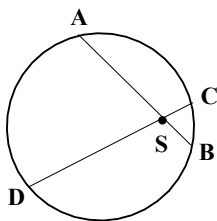
Θεώρημα: Όταν δύο χορδές AB και CD τέμνονται μέσα σε έναν κύκλο στο σημείο S , το γινόμενο των τμημάτων που ορίζονται στη μία χορδή είναι ίσο με το γινόμενο των τμημάτων της άλλης χορδής δηλαδή $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Θεώρημα: Εάν από σημείο S εκτός του κύκλου φέρουμε τις τέμνουσες SAB και SCD τότε ισχύει: $SA \cdot SB = SC \cdot SD$

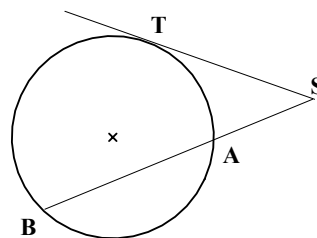
Θεώρημα: Εάν από σημείο S εκτός του κύκλου φέρουμε μια τέμνουσα SAB και το εαπτόμενο τμήμα ST τότε ισχύει: $SA \cdot SB = ST^2$



$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$



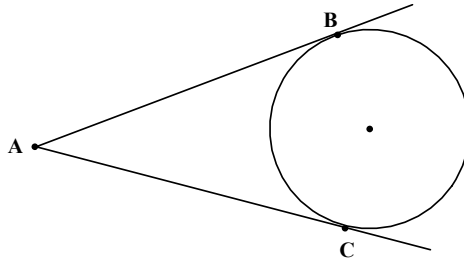
$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$



$$SA \cdot SB = ST^2$$

Ιδιότητες της εφαπτομένης.

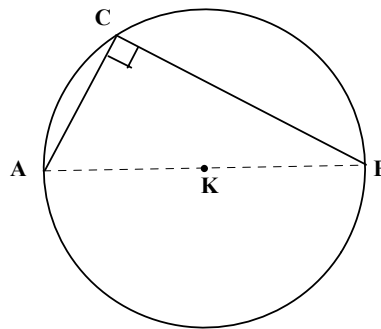
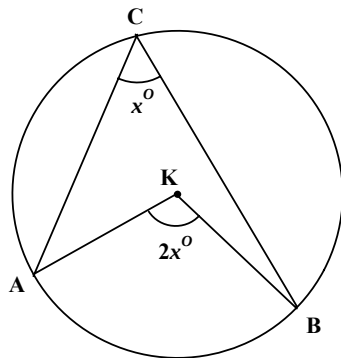
- Οι εφαπτόμενες που άγονται από ένα σημείο εκτός του κύκλου προς τον κύκλο είναι ίσες μεταξύ τους.



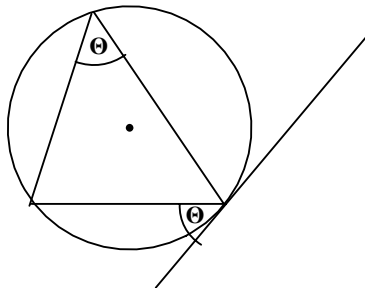
$$AB, AC \text{ εφαπτομένες} \Rightarrow AB = AC$$

Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός κύκλου.

- Μια εγγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.
- Όλες οι εγγραμμένες γωνίες, που βαίνουν στο ίδιο τόξο, είναι ίσες.
- Κάθε εγγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό του τόξου στο οποίο βαίνει.
- Όλες οι εγγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ορθές γωνίες.



- Μια γωνία, που σχηματίζεται από μια χορδή και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της χορδής, ισούται με το μισό του τόξου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και τη χορδή.

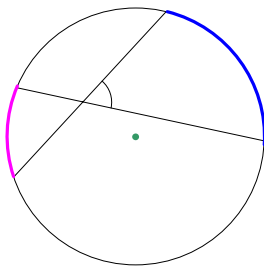


- **Γωνία δύο τεμνουσών** ονομάζουμε τη γωνία της οποίας η κορυφή ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό κύκλου.

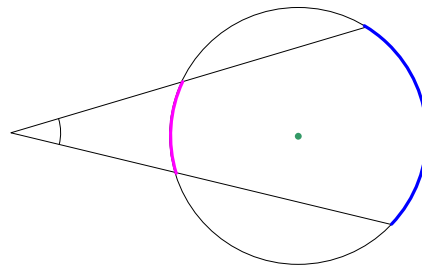
α) Αν η κορυφή της γωνίας δύο τεμνουσών ενός κύκλου ανήκει στο εσωτερικό του τότε η γωνία που σχηματίζουν ισούται με το ημιάθροισμα των τόξων που περιέχονται από την γωνία και την κατακορυφήν της.

β) Αν η κορυφή της γωνίας δύο τεμνουσών ενός κύκλου ανήκει στο εξωτερικό του τότε η γωνία που σχηματίζουν ισούται με την ημιδιαφορά των τόξων που περιέχονται από την γωνία.

- Η γωνία μεταξύ δύο τέμνουσων ευθειών που άγονται από ένα σημείο εκτός του κύκλου ισούται με την ημιδιαφορά των τόξων που ορίζονται πάνω στον κύκλο.



$$\hat{E} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{AD})$$



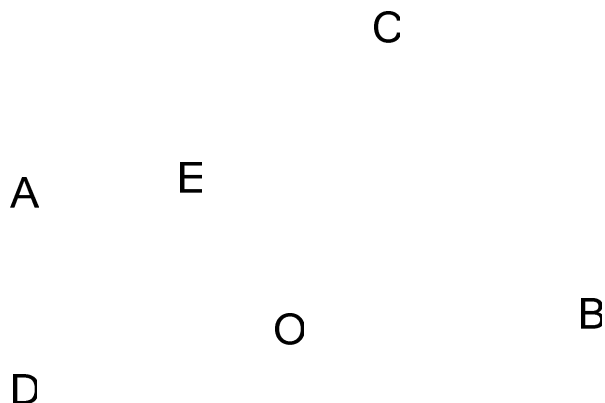
$$\hat{E} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{AD})$$

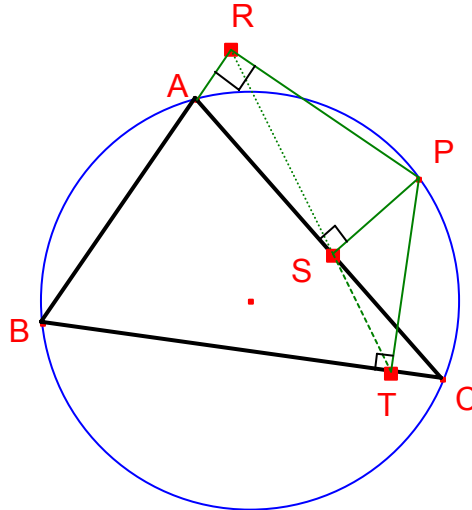
Ειδικές περιπτώσεις

Θεώρημα του Πτολεμαίου: Έστω ένα εγγραμμένο τετράπλευρο ABCD.

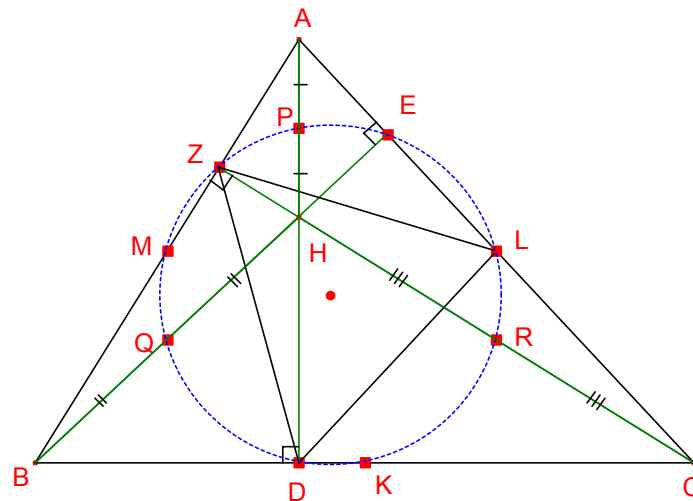
Τότε ισχύει $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (όπου AC, BD διαγώνιες).

Θεώρημα (ευθεία Simson): Έστω ABC ένα τρίγωνο P ένα σημείο στο περιγεγραμμένο κύκλο. (διαφορετικό από τα A, το B, το C). Τότε τα ίχνη των καθέτων που φέρονται από το P στις πλευρές AB, BC, CA (ή στις προεκτάσεις τους) είναι συνευθειακά. .





Θεώρημα Euler (Ο κύκλος των εννέα σημείων): Σε οποιοδήποτε τρίγωνο, υπάρχει κύκλος ο οποίος περνά από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, τα μέσα των τμημάτων που ορίζονται ανάμεσα στο ορθόκεντρο με κάθε κορυφή του τριγώνου και από τα ίχνη των τριών υψών το.



Θεώρημα Ceva: Έστω τρίγωνο ABC, και P, Q, R είναι σημεία πάνω στις ευθείες BC, CA, AB αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες AP, BQ, CR περνούν από το ίδιο σημείο αν και μόνον αν ισχύει:

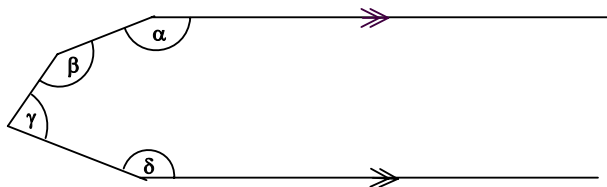
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

Θεώρημα του Μενελάου: Έστω ένα τρίγωνο ABC, και τα σημεία P, Q, R σημεία πάνω στις ευθείες BC, CA, AB αντίστοιχα. Τότε τα σημεία P, Q, R είναι συνευθειακά αν και μόνον αν

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

Ασκήσεις

Πρόβλημα 1. Στο πιο κάτω σχήμα, να βρείτε το άθροισμα των γωνιών $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ οι οποίες ορίζονται από τις δύο παράλληλες ευθείες.

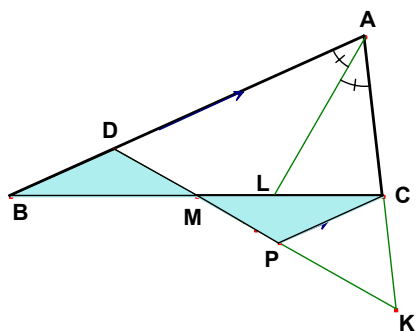


■ Λύση

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\pi$$

Πρόβλημα 2. Έστω το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς BC του τριγώνου ABC ($AB > AC$), και έστω AL είναι η διχοτόμος τις γωνίας A. Μια ευθεία η οποία περνά από το σημείο M και είναι κάθετη στην ευθεία AL τέμνει την πλευρά AB στο σημείο D. Να αποδείξετε ότι $AD = \frac{1}{2}(AB + AC)$

■ Λύση



Η ευθεία DM τέμνει την ευθεία AC στο σημείο K. Τότε το τρίγωνο ADK είναι ισοσκελές άρα $AD=AK$.

Φέρουμε την ευθεία $CP \parallel AB$ (P είναι το σημείο το οποίο η ευθεία τέμνει το DK).

Το τρίγωνο BDM είναι ίσο με το MPC άρα έχουμε ότι $BD=PC$.

Ισχύει $\angle CPK = \angle ADP$ άρα το τρίγωνο PCK είναι ισοσκελές τρίγωνο.

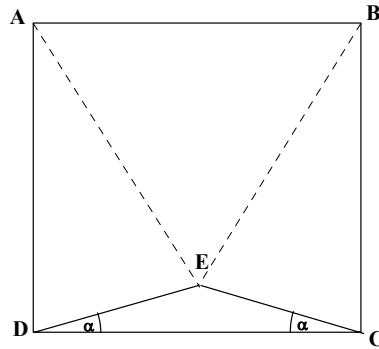
Από την ισότητα $PC = CK$ έχουμε ότι $BD=PC=CK$

$AD=AK=AC+CK \Rightarrow AD=AC+BD \Rightarrow AD=AC+AB-AD \Rightarrow 2AD=AC+AB \Rightarrow$

$AD = \frac{1}{2}(AB+AC)$

Πρόβλημα 3. Στο τετράγωνο ABCD (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα), $\alpha = \frac{\pi}{12}$

. Να αποδείξετε ότι το $\triangle ABE$ είναι ισόπλευρο.



■ Λύση

Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο DCF όπως φαίνεται στο σχήμα.
 Ισχύει ότι $DE = EC$ (DEC ισοσκελές τρίγωνο)

$$\angle ADE = \angle BCE = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \quad (1) \quad \text{και} \quad AE = BE \quad (\triangle ADE = \triangle BCE) \quad (2), \quad \text{τότε}$$

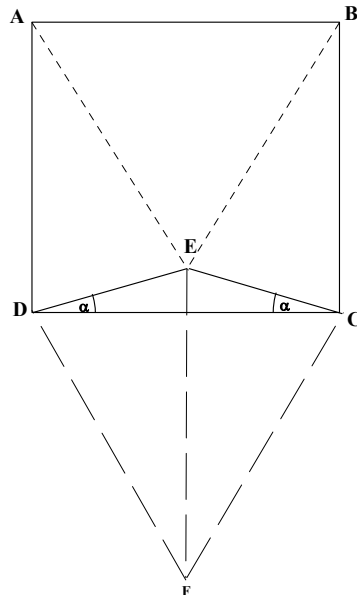
$\triangle DFC$ και $\triangle DEC$ είναι και τα δύο ισοσκελή, οπότε FE είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος DC .

$$\text{Άρα } \angle DEF = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \quad (3)$$

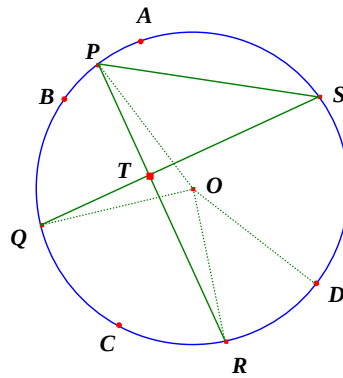
Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε ότι

$$\triangle ADE = \triangle DEF = AE = DF = DC = AB \quad (4)$$

Από τις (2) και (4) το τρίγωνο AEB είναι ισόπλευρο.



Πρόβλημα 4. (Canadian Mathematical Olympiad, 1975). Στο σχήμα τα σημεία A, B, C, D είναι τέσσερα διαδοχικά σημεία τα οποία ανήκουν στον κύκλο και P, Q, R, S είναι σημεία πάνω στο κύκλο τα οποία αντίστοιχα τα μέσα των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$. Να αποδείξετε ότι PR είναι κάθετο στο QS.



■ **Λύση**

Έστω PR και QS τέμνονται στο σημείο T και έστω O είναι το κέντρο του κύκλου.

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 2\pi \Rightarrow 2\widehat{PB} + 2\widehat{BQ} + 2\widehat{RD} + 2\widehat{DS} = 2\pi \Rightarrow$$

$$(\widehat{PB} + \widehat{BQ}) + (\widehat{RD} + \widehat{DS}) = \pi \Rightarrow \boxed{\widehat{PBQ} + \widehat{RDS} = \pi} \quad (1)$$

$$\Delta PSQ \Rightarrow \angle PQS = \pi - (\angle PST + \angle SPT) = \pi - \frac{1}{2}(\angle POQ + \angle ROS) = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

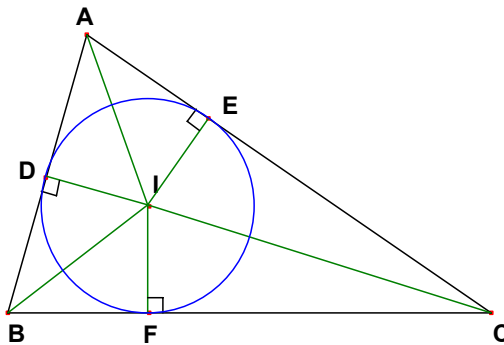
Άρα οι ευθείες QS και PR είναι κάθετες.

Πρόβλημα 5. Έστω τρίγωνο ABC και ο εγγεγραμμένος κύκλος ο οποίος εφάπτεται στην πλευρά AB στο σημείο D. Να αποδείξετε ότι:

$$BD = \frac{1}{2}(AB + BC - CA)$$

■ **Λύση**

Φέρουμε τις κάθετες ID, IE, IF από το κέντρο του κύκλου στις πλευρές του τριγώνου.



$$\text{Άρα έχουμε } AB = AD + DB \Rightarrow AB = AE + DB \Rightarrow AB = AC - EC + DB \Rightarrow$$

$$AB = AC - CF + DB \Rightarrow AB = AC - (BC - BF) + DB \Rightarrow$$

$$AB = AC - BC + BF + DB \Rightarrow AB = AC - BC + 2DB \Rightarrow$$

$$BD = \frac{1}{2}(AB + BC - CA)$$

Πρόβλημα 6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABCD. Παίρνουμε σημεία E και Z πάνω στις πλευρές AB και CD αντίστοιχα, έτσι ώστε CZ=AE και σημεία H και F πάνω στις πλευρές AD και CB αντίστοιχα, έτσι ώστε CF=AH. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ABCD

είναι το ίδιο σημείο, με το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου EFZH.

Solution

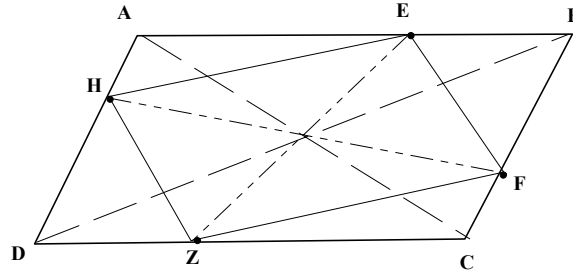
Αρχικά θα αποδείξουμε ότι τα τετράπλευρα EFZH είναι παραλληλόγραμμα.

$$\triangle CZF = \triangle AEH \Rightarrow HE = ZF \quad (1)$$

$$BE = DZ, BF = DH \Rightarrow \triangle DZH = \triangle BEF \Rightarrow HZ = EF \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι EFZH είναι παραλληλόγραμμα. (3)

Από τη σχέση $AE \parallel ZC$ έχουμε ότι το AECZ είναι παραλληλόγραμμα άρα οι διαγώνιοι AC και EZ τέμνονται έστω στο σημείο O.



Το σημείο O είναι τα μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AC άρα το σημείο O είναι το κοινό σημείο των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ABCD.

Όμοια το σημείο O είναι το μέσο του τμήματος EZ, άρα το σημείο O είναι επίσης το κοινό σημείο των διαγωνίων του τετραπλεύρου EFZH.

Πρόβλημα 7. Δίνεται τρίγωνο ABC ($AB < AC$) και σημείο D το μέσο της πλευράς AC.

Στην ευθεία DB, παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $DE = \frac{AC}{2}$. Να

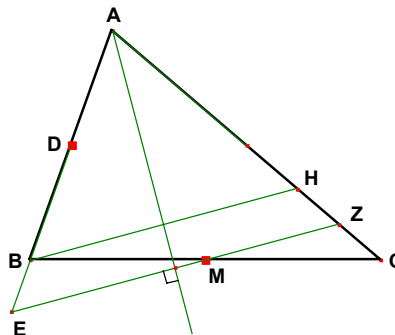
αποδείξετε ότι η κάθετος ευθεία από το σημείο E στην διχοτόμο της γωνίας A περνά από το μέσο της πλευράς BC του τριγώνου ABC.

Λύση

Η κάθετος από το σημείο E στην διχοτόμο της γωνίας A τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AC στο σημείο Z και η κάθετος από το B στην διχοτόμο στο σημείο H. Τα τρίγωνα ABH, AEZ είναι ισοσκελή άρα έχουμε $AZ = AE$, $AH = AB$.

$$AZ - AH = AE - AB \Rightarrow HZ = AD + DE - AB = \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} - AB \Rightarrow$$

$$HZ = \frac{AC - AB}{2} \quad (1)$$



$$HC = AC - AH \Rightarrow HC = AC - AB \quad (2)$$

$$\Rightarrow ZC = HC - HZ = AC - AB - \frac{AC - AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} \Rightarrow$$

$$ZC = \frac{AC - AB}{2} \quad (3)$$

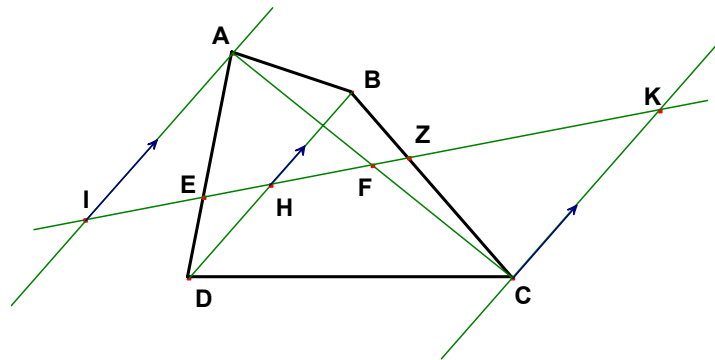
Από τις (1) και (3) έχουμε ότι $HZ = ZC$. Άρα στο τρίγωνο CHB , Z είναι το μέσο της πλευράς CH και $ZE \parallel HB$. Έτσι το τμήμα ZE περνά από το μέσο της πλευράς BC .

Πρόβλημα 8. Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$. Μια ευθεία (l) η οποία ενώνει τα μέσα H, F των διαγωνίων BD, AC τέμνει τις πλευρές AD, BC στα σημεία E και Z .

Να αποδείξετε ότι: $\frac{AE}{ED} = \frac{CZ}{BZ}$

Λύση

Φέρουμε τις ευθείες AI και CK παράλληλες στην διαγώνιο DB .



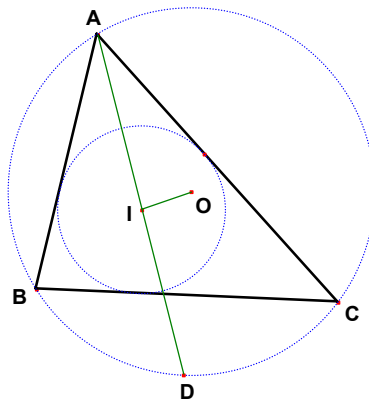
Τα τρίγωνα AIE, EDH και ZCK, ZHB είναι όμοια, άρα

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AI}{DH}, \quad \frac{CZ}{BZ} = \frac{CK}{BH}$$

$$BH=HD, AI=CK \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{CZ}{BZ}$$

Πρόβλημα 9. Δίνεται τρίγωνο ABC με $2BC = AB + AC$. Να αποδείξετε ότι οι η διχοτόμος της γωνίας A είναι κάθετος στην ευθεία η οποία ενώνει τα κέντρα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

Λύση



Έστω I και O τα κέντρα του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου αντίστοιχα. Η διχοτόμος AI τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο D .

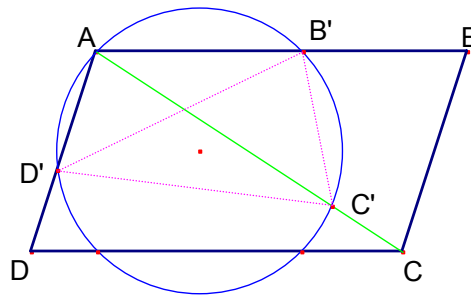
Στο τετράπλευρο $ABCD$ εφαρμόζουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου, άρα
 $(AD)(BC) = (AB)(CD) + (AC)(BD) = (BD)(AB + AC) = (BD) \cdot 2(BC)$ δηλαδή
 $(AD) = 2(BD)$.

Επιπλέον ισχύει ότι $BD = DI$ ($\angle IBD = \angle BID$) $\Rightarrow (AD) = 2(AI)$ άρα το σημείο I είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AD δηλαδή το OI είναι κάθετο στο AD .

Πρόβλημα 10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABCD$. Κύκλος περνά από το σημείο A , τέμνει τις πλευρές AB , AD και την διαγώνιο AC στα σημεία B' , D' , C' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$(AB')(AB) + (AD')(AD) = (AC)(AC')$$

Λύση



$$AB'C'D' \text{ (Θεώρημα Πτολεμαίου)} \quad (AB')(D'C') + (AD')(B'C') = (AC')(DB') \quad (1)$$

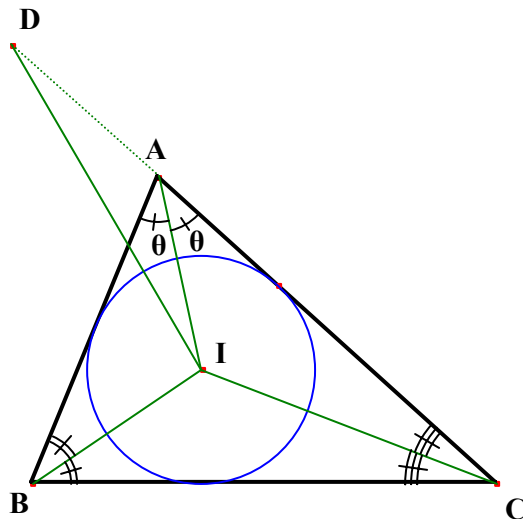
$$\text{Τα τρίγωνα } B'D'C' \text{ και } ADC \text{ είναι όμοια άρα } \frac{BC'}{AD} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{B'D'}{AC} \Rightarrow$$

$$B'C' = AD \frac{B'D'}{AC} \quad (2), \quad C'D' = DC \frac{B'D'}{AC} \quad (3)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε } (AB')(AB) + (AD')(AD) = (AC)(AC')$$

Πρόβλημα 11. Δίνεται τρίγωνο ABC έτσι ώστε $\angle A = 2\theta$ και I είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του ABC . Εάν $CA + AI = BC$, να βρείτε την γωνία B συναρτήσει του θ .

Λύση



AI είναι η διχοτόμος της γωνίας A άρα $\angle BAI = \angle CAI = \theta$

Παίρνουμε σημείο D το οποίο ανήκει πάνω στην ευθεία AC έτσι ώστε $AD = AI$. Άρα το τρίγωνο ADI είναι ισοσκελές τρίγωνο από το οποίο έχουμε ότι $\angle ADI = \angle AID$.

Η γωνία θ είναι μια εξωτερική γωνία του τριγώνου ADI άρα $\angle ADI = \frac{1}{2} \theta$

(1)

$$CA + AI = BC, \quad AD = AI \Rightarrow BC = CA + AD \Rightarrow BC = CD \Rightarrow$$

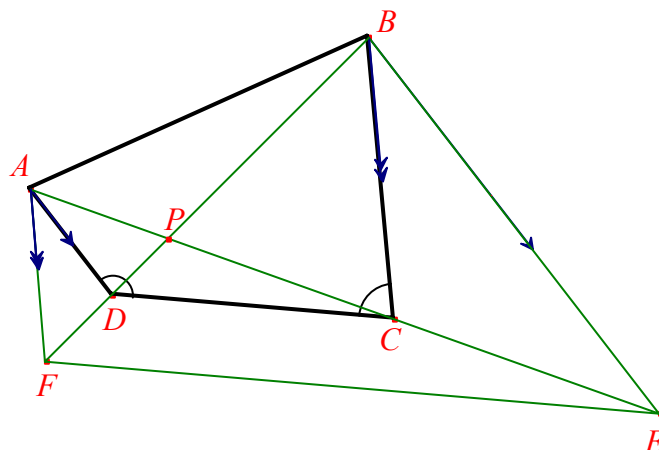
$$\triangle CDI = \triangle CBI \Rightarrow \angle ADI = \angle CBI \Rightarrow \angle ADI = \angle CBI = \frac{1}{2} \theta \Rightarrow$$

$$\angle B = 2 \angle CBI = \theta$$

Πρόβλημα 12. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ με $\angle ADC > 90^\circ$, $\angle BDC > 90^\circ$. Έστω E το σημείο το οποίο η ευθεία AC τέμνει την παράλληλη ευθεία στην AD που περνά από το σημείο B και έστω F είναι το σημείο στο οποίο η ευθεία BD τέμνει την παράλληλη ευθεία προς την BC που περνά από το A . Να αποδείξετε ότι EF είναι παράλληλη με την CD .

Λύση

Έστω ότι P το σημείο τομής των διαγωνίων AC και BD .



$$BC \parallel AF \Rightarrow \triangle PAF \approx \triangle PCB \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PF}{PB} = \frac{AF}{CB} \quad (1)$$

$$AD \parallel BE \Rightarrow \triangle PEB \approx \triangle PAD \Rightarrow \frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PD} = \frac{EB}{AD} \quad (2)$$

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow \frac{PA}{PC} \cdot \frac{PE}{PA} = \frac{PF}{PB} \cdot \frac{PB}{PD} \Rightarrow \frac{PE}{PC} = \frac{PF}{PD} \quad (\text{από το θεώρημα του Θαλή}) \Rightarrow DC \parallel EF$$

Πρόβλημα 13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABCD και είναι ένα σημείο στο εσωτερικό του έτσι ώστε $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$. Να αποδείξετε ότι $\angle PBC = \angle CDP$.

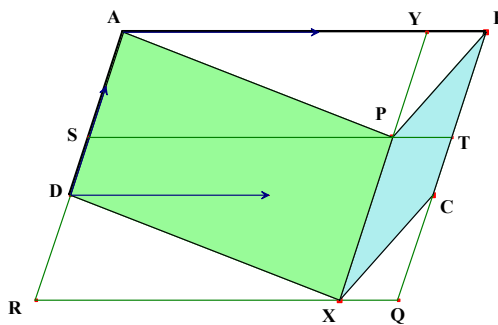
Λύση

Φέρουμε την ευθεία ST η οποία περνά από το σημείο P είναι παράλληλη με την η οποία τις BC και AD στα σημεία T και S αντίστοιχα.

Προεκτείνουμε την BC στο Q έτσι ώστε TQ=BC. Προεκτείνουμε την AD στο R έτσι ώστε SR=AD.

Το τετράπλευρο BCXP είναι παραλληλόγραμμο ($BC \parallel PX$)

Το παραλληλόγραμμο APXD είναι παραλληλόγραμμο ($AD \parallel PX$)



$\angle BPY = \angle CXP$, $\angle YPA = \angle PXD$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη).

Άρα έχουμε $\angle APB = \angle BPY + \angle YPA = \angle CXP + \angle PXD = \angle CXD$.

$\Rightarrow \angle CDP + \angle CXD = 180^\circ$. Άρα το τετράπλευρο PCXD είναι εγγεγραμμένο.

$\angle CDP = \angle CXP$ (Βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\angle CXP = \angle XCQ$ (εντός και εναλλάξ γωνίες), $\angle XCQ = \angle PBC$ ((εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη).

Άρα $\angle CDP = \angle PBC$

Πρόβλημα 14. Δίνεται τρίγωνο ABC και M το μέσο της πλευράς του BC. Εάν $\angle BAM = \angle ACB$ και $\angle MAC = 15^\circ$ να υπολογίσετε την γωνία $\angle ACB$.

Λύση

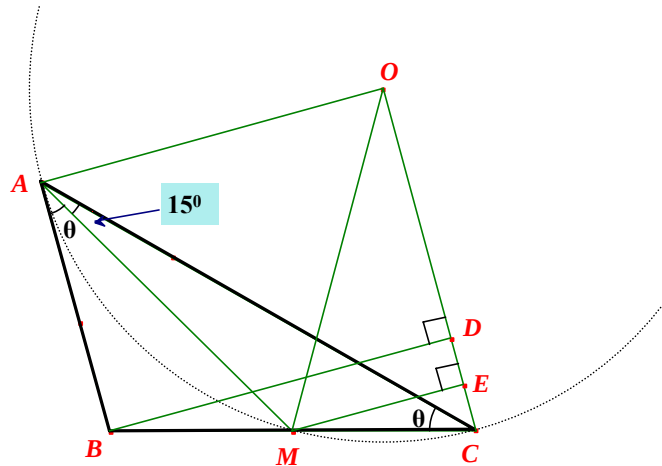
Έστω O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AMC.

$\angle ACM = \angle BAM = \theta \Rightarrow \angle MOC = 30^\circ$.

$\angle ACM = \angle BAM \Rightarrow AB$ είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, OC)

Έστω D, E είναι τα ίχνη των καθέτων BD and ME πάνω στην OC.

$\Rightarrow ME = \frac{OM}{2}$, $BC = 2MC \Rightarrow BD = 2ME = OM = AO \Rightarrow ABDO$ είναι ορθογώνιο.

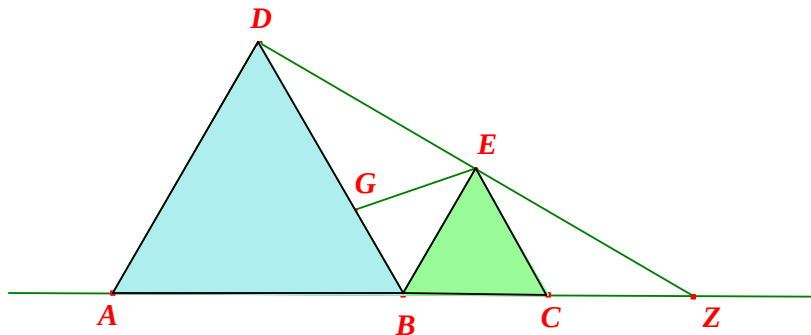


$$\Rightarrow \angle CAO = 45^\circ \Rightarrow \angle BAC = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

Πρόβλημα 15. Δίνεται ευθεία XY και παίρνουμε στη σειρά τα σημεία A, B, C έτσι ώστε $AB = 2BC$. Κατασκευάζουμε στο ίδιο μέρος της ευθείας XY τα ισόπλευρα τρίγωνα ABD και BCE . Οι ευθείες DE και AC τέμνονται στο σημείο Z και οι ευθείες DB και AE στο σημείο G . Να αποδείξετε ότι $(DG) = 2(GB)$.

Λύση



$$\angle DAB = \angle BEC = 60^\circ \text{ (} ABD \text{ και } BCE \text{ ισόπλευρα τρίγωνα)} \Rightarrow DA \parallel BE \quad (1)$$

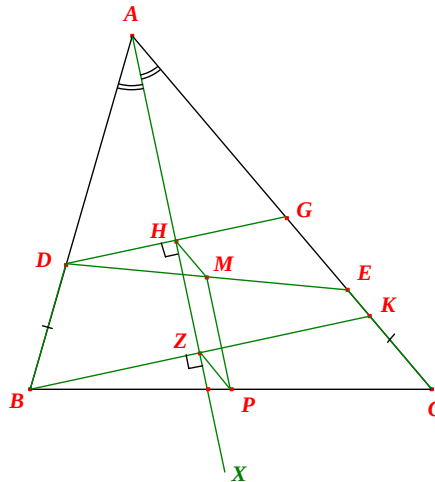
$$BE = BC = \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow BE \parallel \frac{AD}{2} \Rightarrow B \text{ είναι το μέσο του } AZ \text{ και } E \text{ το μέσο του } DZ.$$

DB και AE είναι διάμεσοι του τριγώνου ADZ άρα G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ADZ άρα έχουμε $DG = 2GB$.

Πρόβλημα 16. Δίνεται τρίγωνο ABC και σημεία D και E τα οποία ανήκουν πάνω στις πλευρές AB και AC αντίστοιχα έτσι ώστε $BD = CE$. Έστω M είναι το μέσο του τμήματος DE και P το μέσο της πλευράς BC . Να αποδείξετε ότι PM είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας A .

Solution



Φέρουμε τις κάθετες ευθείες από τα σημεία D, B στην διχοτόμο AX . (Βλέπε σχήμα)

Το τρίγωνο $\triangle DAG$ είναι ισοσκελές (το AH είναι διχοτόμος και ύψος) άρα έχουμε ότι το τμήμα AH είναι και διάμεσος δηλαδή $DH=HG$.

Η μέσο του DG, M μέσο του DE άρα $HM \parallel \frac{GE}{2}$ (1)

Όμοια αποδεικνύουμε ότι $ZP \parallel \frac{KC}{2}$ (2)

$(1) \wedge (2) \Rightarrow HM \parallel AC \text{ and } ZP \parallel AC \Rightarrow HM \parallel ZP$ (3)

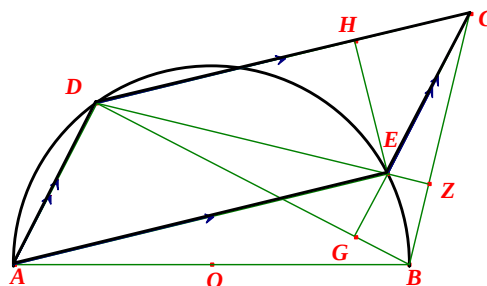
Τα τρίγωνα $\triangle BAK$, $\triangle DAG$ είναι ισοσκελή, άρα $AB=AK$ και $AD=AG$ και $AB-AD=AK-AG \Rightarrow BD=GK \Rightarrow EC=GK \Rightarrow \cancel{EK} + KC = GE + \cancel{EK} \Rightarrow KC=GE$ (4)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) έχουμε $HM \parallel ZP$ άρα το τετράπλευρο HMPZ είναι παραλληλόγραμμο, και έτσι έχουμε ότι $HZ=MP$ δηλαδή **PM** **AX**

Πρόβλημα 17. Δίνονται δύο σημεία D, E πάνω στο ημικύκλιο (c) με διάμετρο AB. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ADCE. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες DE και BC είναι παράλληλες.

Λύση

Φέρουμε τις ευθείες DB και DC, H το σημείο τομής των BE και DC και G το σημείο τομής των ευθειών DB και CE.



Το τμήμα AB είναι διάμετρος άρα $\angle ADB = 90^\circ$, $AD \perp DG$ και $CE \parallel DA$, $CE \perp DB$ επομένως το CG είναι ύψος του τριγώνου DBC .

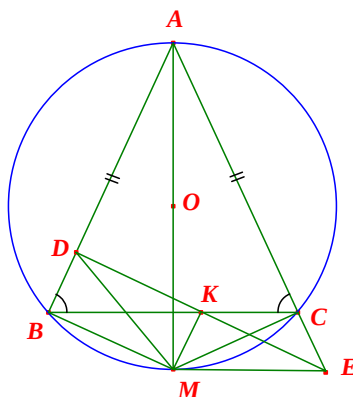
Όμοια το BH είναι ύψος του τριγώνου BDC .

Άρα CG, BH είναι δύο από τα ύψη του τριγώνου BDC έχουμε ότι το σημείο E είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, άρα $DE \perp BC$

Πρόβλημα 18. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (c).

M είναι το μέσο του τόξου $\widehat{BC}$. Παίρνουμε ένα σημείο K το οποίο ανήκει στην πλευρά BC και φέρουμε από το σημείο K την κάθετη στο MK , η οποία τέμνει τις ίσες πλευρές AB και AC στα σημεία D και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $DK=KE$.

Λύση



Έχουμε ότι $\widehat{MB} = \widehat{MC} \Rightarrow MB = MC$ άρα η ευθεία AM είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος BC οπότε η AM είναι διάμετρος και έτσι έχουμε ότι $\angle ABM = \angle ACM = 90^\circ$, $MK \perp DE$ και $MB \perp AB$, έτσι το τετράπλευρο $MBDK$ είναι εγγράψιμο άρα $\angle MDK = \angle MBK$ (1)

Ισχύουν ότι $MK \perp DE$ και $MC \perp CE$ άρα το τετράπλευρο $MKCE$ είναι εγγράψιμο, άρα $\angle MEK = \angle MCK$ (2).

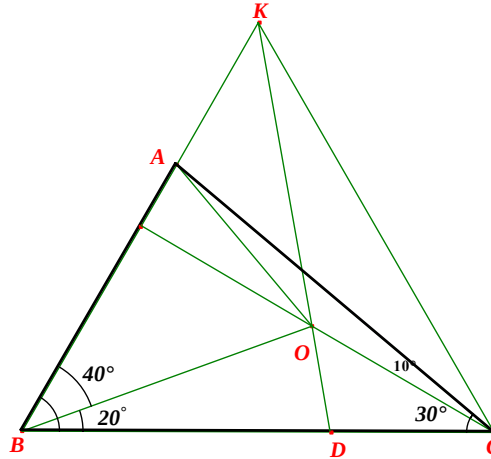
$MB = MC$ άρα $\angle MBC = \angle MCB$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι $\angle MDK = \angle MEK$, άρα το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος έτσι έχουμε ότι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος, δηλαδή $KD = KE$.

Πρόβλημα 19. Δίνεται τρίγωνο ABC με $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 40^\circ$ και σημείο O μέσα στο τρίγωνο, έτσι ώστε $\angle OBC = 20^\circ$ και $\angle OCB = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

- (i) $BO = BA$
- (ii) $OA = OC$

Λύση



Έστω το σημείο K πάνω στην ευθεία AB έτσι ώστε $BK=BC$, άρα το τρίγωνο $\triangle KBC$ είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Η γωνία $\angle OCB = 30^\circ$ έτσι έχουμε ότι η OC είναι διχοτόμος, άρα η OC είναι ύψος και μεσοκάθετος του τμήματος BK , άρα $OB=OK$ (1).

Από το ισοσκελές τρίγωνο OBK έχουμε ότι $\angle OKB = \angle OBK = 40^\circ$

$$\triangle KBD \Rightarrow \angle KBD = 180^\circ - (\angle DKB + \angle KBO + \angle OBD) = 80^\circ$$

$$\triangle BOD \Rightarrow \angle BOD = 180^\circ - (\angle ODB + \angle OBD) = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOB = \angle ODB \Rightarrow \triangle BOD \text{ είναι ισοσκελές τρίγωνο, δηλαδή } BO = BD \text{ (2)}$$

Τα τρίγωνα BC και KBD είναι ίσα ($BC=BK$, $\angle OKA = \angle ACB = 40^\circ$, $\angle ODB = \angle A = 80^\circ$) άρα $BD = BA$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι $OB = OA$ άρα το τρίγωνο $\triangle BAO$ είναι ισοσκελές και έτσι έχουμε ότι $\angle BAO = \angle BOA = 70^\circ$.

Από τις σχέσεις $\angle OAC = \angle BAC - \angle BAO = 10^\circ$, $\angle OCA = \angle ACB - \angle OCB = 10^\circ$ έχουμε ότι $\angle OAC = \angle OCA$ άρα $\triangle OAC$ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο, άρα $OA = OC$

Πρόβλημα 20. Δίνονται δύο κύκλοι (c_1) , (c_2) με κέντρα τα σημεία K και L αντίστοιχα.

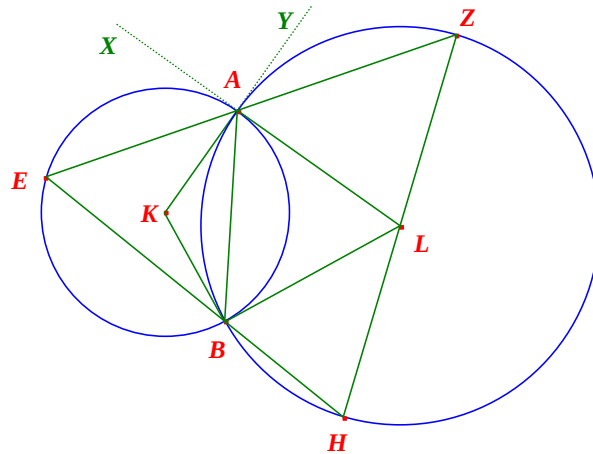
Οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B έτσι ώστε $KA \perp LA$.

Παίρνουμε σημείο E πάνω στον κύκλο (c_1) και οι ευθείες EA και EB

τέμνουν τον κύκλο (c_2) στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε

ότι ZH είναι διάμετρος του κύκλου (c_2) .

Λύση



Φέρνουμε τις ακτίνες LZ , LA , LB , LH . Τα τρίγωνα LAZ , ALB και BLH είναι ισοσκελή. Η ευθεία LA είναι εφαπτομένη του κύκλου (c_1) ($AL \perp KA$).

Έστω $\angle ZLA = 2a$, $\angle AZB = 2b$ and $\angle BLH = 2c$.

$\angle XEA = \angle ABE = 90^\circ - a$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης).

$\angle ABE = 90^\circ - a$, $\angle ABL = 90^\circ - b$ και $\angle LBH = 90^\circ - c$

$\angle ABE + \angle ABL + \angle LBH = 180^\circ$, $a + b + c = 90^\circ$.

Άρα, $2a + 2b + 2c = 180^\circ$, έτσι τα σημεία Z , L , H είναι συνευθειακά.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Mircea Becheanu

§1. Σύγκριση και διάταξη των πραγματικών αριθμών

Όπως συνήθως, σημειώνουμε με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Τα στοιχεία του ονομάζονται πραγματικοί αριθμοί ή απλά αριθμοί. Οι περισσότεροι άνθρωποι γνωρίζουν να εκτελούν με τους πραγματικούς αριθμούς τις στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις όπως: πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, αφαίρεση και διαίρεση. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε με στοιχειώδη τρόπο ορισμένες δυνάμεις των αριθμών.

Οι αριθμοί δεν υποβάλλονται μόνο σε αλγεβρικούς υπολογισμούς. Μια σημαντική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών είναι και η σύγκρισή τους. Το κύριο εργαλείο στη σύγκριση των αριθμών είναι, πρώτ' απ' όλα, η ταξινόμησή τους σε θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Για παράδειγμα οι

- $1; 2; 3; \frac{2}{3}; \frac{7}{5}; \frac{2005}{111}; \sqrt{2}$ είναι θετικοί αριθμοί, και οι
- $-1; -2; -3; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{5}; -\frac{2005}{111}; -\sqrt{2}$ είναι αρνητικοί αριθμοί.

Υπενθυμίζουμε ότι, διαισθητικά, οι πραγματικοί αριθμοί αντιπροσωπεύουν το μέγεθος κάποιου πραγματικού αντικειμένου. Παραδείγματος χάριν:

- το μέγεθος ενός πεπερασμένου συνόλου με δέκα στοιχεία είναι ο αριθμός 10

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\} \Rightarrow |A| = 10,$$

- το μέγεθος ενός τμήματος είναι το μήκος του,

$A \quad \quad \quad B$

-  $\Rightarrow AB = 4.5$

- το μέγεθος ενός γεωμετρικού σχήματος είναι το εμβαδόν του,

$D \quad \quad C$



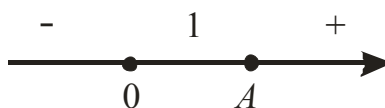
$$\Rightarrow S(ABCD) = a^2.$$

$A \quad a \quad B$

Όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι θετικοί αριθμοί.

Υπενθυμίζουμε ότι οι θετικοί αριθμοί αντιπροσωπεύονται συνήθως ως μήκη τμημάτων. Αυτή η αντιπροσώπευση μπορεί να επεκταθεί και στους αρνητικούς αριθμούς, προκειμένου να ληφθεί η γεωμετρική αναπαράσταση όλων των αριθμών ως τα σημεία μιας ευθείας. Η διαδικασία αυτής της αντιπροσώπευσης είναι:

- Πρώτο βήμα: καθορίζουμε ένα αρχικό σημείο O σε μια ευθεία ℓ .
- Δεύτερο βήμα: επιλέγουμε στην ευθεία ℓ μια θετική κατεύθυνση. Κατά παράδοση, η θετική κατεύθυνση είναι από το O προς τα δεξιά, ενώ η κατεύθυνση από το O προς τα αριστερά καλείται αρνητική κατεύθυνση.
- Τρίτο βήμα: επιλέγουμε ένα μοναδιαίο τμήμα κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης.



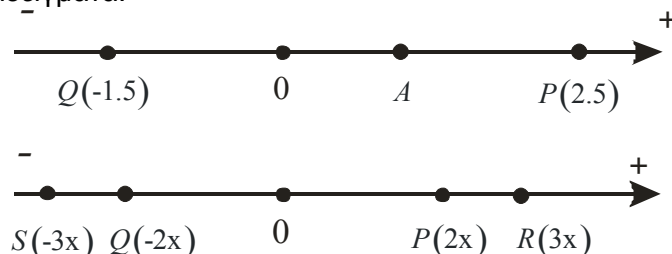
- Τέταρτο βήμα: αντιστοιχίζουμε σε οποιονδήποτε αριθμό a το σημείο $P(a) = P$, έτσι ώστε το τμήμα OP να είναι κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης για όλους τους θετικούς αριθμούς a και κατά μήκος της αρνητικής κατεύθυνσης για όλους τους αρνητικούς αριθμούς. Επιπλέον, το μήκος του τμήματος OP να είναι a για το θετικό αριθμό a και $-a$ για έναν αρνητικό αριθμό a . Μετά από αυτήν την κατασκευή, είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι οι αρνητικοί αριθμοί λαμβάνονται από την ανάκλαση των θετικών αριθμών κατά την αρχή O .

Σε ότι ακολουθεί θα θεωρούμε γνωστές μερικές διαισθητικά φανερές ιδιότητες των αριθμών. Συγκεκριμένα:

- οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος,
- για οποιοδήποτε θετικό αριθμό a υπάρχει ένα τμήμα μήκους a .
- σε μεγαλύτερα τμήματα αντιστοιχεί πιο μεγάλος αριθμός.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η παραπάνω κατασκευή είναι διανοητική επειδή δεν μπορεί πάντα να πραγματοποιηθεί με πρακτικό τρόπο. Παραδείγματος χάριν, όταν έχουμε πολύ μικρά και πολύ μεγάλα τμήματα που βρίσκονται πάνω στην ίδια γραμμή. Μια άλλη κατάσταση που μπορεί να εμφανιστεί είναι όταν έχουμε διαφορετικά τμήματα των οποίων τα μήκη είναι πολύ κοντά, όπως $a = 2$ και $b = 1.9999$.

Για να περιγράψουμε γλαφυρότερα την παραπάνω κατασκευή παρουσιάζουμε τα παρακάτω παραδείγματα:

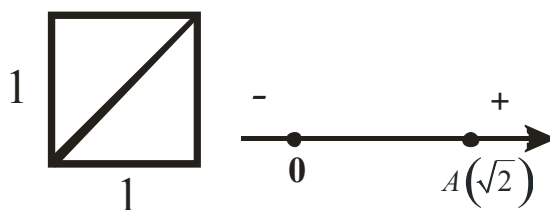


1.1. Ορισμός. Μια ευθεία ℓ στην οποία παριστάνονται οι πραγματικοί αριθμοί ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών ή πραγματικός άξονας.

Ένας δύσκολος στόχος όταν παριστάνουμε αριθμούς πάνω στον πραγματικό άξονα προκύπτει από το γεγονός ότι είναι ταξινομημένοι σε ρητούς αριθμούς και σε άρρητους. Δεδομένου ότι οι ρητοί αριθμοί αντιπροσωπεύουν ένα ακέραιο πλήθος τμημάτων που λαμβάνονται από κάποιο μέγεθος, η τοποθέτησή τους στον άξονα είναι εύκολη υπόθεση, και γίνεται με χρήση γεωμετρικών μεθόδων. Οι άρρητοι αριθμοί όπως οι

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \pi, \dots$$

είναι γνωστό ότι εμφανίζονται σε διάφορες γεωμετρικές καταστάσεις και η αναπαράστασή τους δεν είναι πάντα εύκολη. Παραδείγματος χάριν, ο $\sqrt{2}$ εμφανίζεται ως το μήκος της διαγωνίου σε ένα τετράγωνο πλευράς 1. Επομένως, για να τον αναπαραστήσουμε στον πραγματικό άξονα, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα 1×1 τετράγωνο, κατόπιν να πάρουμε το μήκος της διαγωνίου του με τη χρήση ενός διαβήτη και να το τοποθετήσουμε κατά μήκος του πραγματικού άξονα.



1.2. Πρόβλημα. Να παραστήσετε στον πραγματικό άξονα τους παρακάτω αριθμούς:

$$1; \frac{5}{3}; 1.75; -2.99; \sqrt{3}; \sqrt{5}-1$$

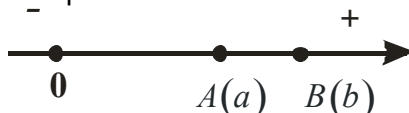
Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε γεωμετρικές κατασκευές, μια ευθεία γραμμή και ένα διαβήτη.

1.3. Η αναπαράσταση των αριθμών στον πραγματικό άξονα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- οι θετικοί αριθμοί αντιπροσωπεύονται στην ίδια ημιευθεία, από το O προς τη θετική κατεύθυνση,
- οι αρνητικοί αριθμοί αντιπροσωπεύονται στην ίδια ημιευθεία, από το O προς την αρνητική κατεύθυνση,
- έστω ότι για θετικούς αριθμούς a, b , τα σημεία $A = A(a)$, $B = B(b)$ είναι τέτοια ώστε το τμήμα OA να είναι μικρότερο από το τμήμα OB . Τότε τα σημεία O, A, B βρίσκονται με αυτή τη διάταξη πάνω στη θετική κατεύθυνση και λέμε ότι το a είναι μικρότερο από το b . Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$a < b.$$

Γεωμετρικά, έχουμε την ακόλουθη εικόνα:



- Για δοσμένους αρνητικούς αριθμούς a, b , τα σημεία $A = A(a)$, $B = B(b)$ βρίσκονται στον αρνητικό άξονα στη διάταξη B, A, O εάν και μόνο εάν το τμήμα OA είναι μικρότερο από το τμήμα OB . Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το b είναι μικρότερο από το a και γράφουμε

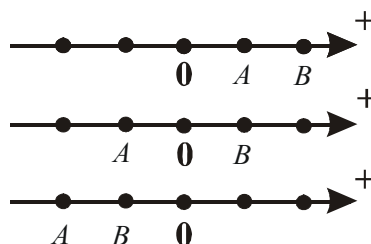
$$b < a.$$

Θεωρώντας ανάκλαση κατά το σημείο O συμπεραίνουμε ότι

$$b < a \Leftrightarrow -a < -b.$$

Η τελευταία ιδιότητα ισχύει επίσης για θετικούς αριθμούς. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε την ακόλουθη γενική ιδιότητα:

- για δοσμένους πραγματικούς αριθμούς a, b και αντίστοιχα σημεία αναπαράστασης τους τα A, B έχουμε: $a < b$ εάν και μόνο εάν το σημείο A βρίσκεται αριστερά του σημείου B .
- για δοσμένους πραγματικούς αριθμούς a, b τέτοιους ώστε $a < b$, που αναπαρίστανται από τα σημεία A, B , αντίστοιχα, το μήκος του τμήματος AB είναι $b - a$. Οι ακόλουθες περιπτώσεις είναι δυνατές:



Οι παραπάνω συγκεκριμένες καταστάσεις μας επιτρέπουν να δώσουμε τον παρακάτω τυπικό ορισμό:

1.4. Ορισμός. Λέμε ότι ο αριθμός a είναι μικρότερος από τον αριθμό b εάν υπάρχει ένας θετικός αριθμός p έτσι ώστε $b = a + p$.

Εάν $a < b$ ή $a = b$ λέμε ότι ο a είναι μικρότερος ή ίσος μεγαλύτερος του b και γράφουμε $a \leq b$. Έτσι, η ιδιότητα $a \leq b$ είναι ισοδύναμη με την $b = a + p$, όπου p είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μηδέν.

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να γράφουμε $p > 0$ αν p είναι (γνήσια) θετικός αριθμός και $p \geq 0$ εάν p είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μηδέν.

Η δήλωση "ο a είναι μεγαλύτερος από τον b " είναι μια σημαντική μαθηματική δήλωση και την καλούμε *σχέση διάταξης* μεταξύ των πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι *ολικά διατεταγμένο σύνολο*. Σε ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο είναι δυνατό να αποφανθεί κανείς ότι ο ένας από δύο διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς προηγείται του άλλου και ο δεύτερος έπεται του πρώτου.

1.5. Πώς συγκρίνουμε αριθμούς;

Αυτός ο στόχος είναι σημαντικός αλλά όχι πάντα εύκολος την πράξη. Υπάρχουν όμως ορισμένες προφανείς καταστάσεις όπως:

- ένας αρνητικός αριθμός είναι πάντα μικρότερος από έναν θετικό αριθμό,
- αν οι αριθμοί έχουν σημεία αντιπροσώπευσης μακρινά το ένα από το άλλο, στον πραγματικό άξονα, τότε η σύγκρισή τους είναι οφθαλμοφανής
- αν οι αριθμοί δίνονται από τις δεκαδικές αναπαραστάσεις τους, (παραδείγματος χάριν μετά από χρήση υπολογιστών) τότε η σύγκρισή τους ανάγεται στην σύγκριση των αντίστοιχων ψηφίων τους.

Για παράδειγμα, από τις παραστάσεις ως δεκαδικά αναπτύγματα των

$$\frac{22}{7} = 3.142857413$$

$$\pi = 3.141592654...$$

$$3\frac{10}{71} = 3.14084507$$

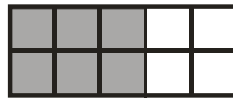
συμπεραίνουμε ότι $3\frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Οι συγκεκριμένες ανισότητες αποδείχθηκαν την αρχαιότητα από τον σπουδαίο μαθηματικό Αρχιμήδη (287 π.Χ. -212 π.Χ.).

Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις των αριθμών. Για παράδειγμα, η σύγκριση των ρητών αριθμών $\frac{1}{2}$

και $\frac{3}{5}$ μπορεί να επιτευχθεί με χρήση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου το οποίο έχει διαιρεθεί σε 10 ίσα τετράγωνα:



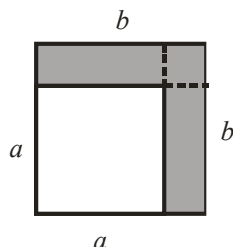
$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$



Πράγματι, η γεωμετρική αναπαράσταση αντιπροσωπεύει το ακόλουθο αριθμητικό επιχείρημα:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}, \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \text{ και } \frac{5}{10} < \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3}{5}.$$

Τα γεωμετρικά σχήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη ή την ερμηνεία μερικών νέων ανισοτήτων. Για παράδειγμα: αν a, b είναι θετικοί αριθμοί και $a < b$ τότε $a^2 < b^2$. Για να το αποδείξουμε αυτό, θεωρούμε το a^2 ως το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά a . Αφού $a < b$, ένα τέτοιο τετράγωνο περιέχεται σε ένα τετράγωνο πλευράς b .



Η διαφορά μεταξύ του εμβαδού του μεγαλύτερου και του μικρότερου τετραγώνου είναι προφανής από την εικόνα:

$$b^2 - a^2 = (b - a)^2 + 2a(b - a) = p$$

Αφού $b - a > 0$, έχουμε $p > 0$. Από αυτό $b^2 = a^2 + p$, δηλαδή ακριβώς ο τυπικός ορισμός της ανισότητας $b^2 > a^2$. Το συμπέρασμα από τις ανωτέρω εκτιμήσεις είναι: ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να μας βοηθήσει για να ανακαλύψουμε μια ευφυή απόδειξη.

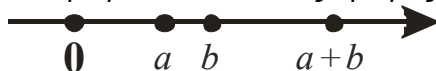
Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την μέθοδο σε μελλοντικές εκτιμήσεις.

1.6. Ιδιότητες των ανισοτήτων μεταξύ αριθμών.

Μια ισχυρή μέθοδος για να αποδείξει ή να ανακαλύψει κανείς ανισότητες μεταξύ των αριθμών είναι να εξετάσει τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Αναφέρουμε και δικαιολογούμε τις πιο κοινές ιδιότητες.

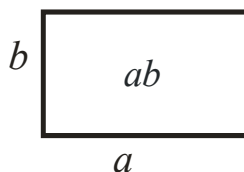
(1) Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.



Γράφουμε τυπικά: $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$.

(2) Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός: $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Διαισθητικά, εάν a, b είναι τα μήκη δύο τμημάτων τότε ab είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, το οποίο είναι θετικός αριθμός.



Από τον κανόνα των προσήμων, το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. Επομένως, $x^2 > 0$ για όλους τους αριθμούς $x, x \neq 0$, και $x^2 = 0$ μόνο για $x = 0$.

(3) Αν $a \leq b$ και $b \leq c$ τότε $a \leq c$ (η σχέση διάταξης είναι μεταβατική).

Απόδειξη. Αφού $a \leq b$ και $b \leq c$ έχουμε $b = a + p$ και $c = b + q$, όπου $p \geq 0$, $q \geq 0$. Τότε

$$c = b + q = (a + p) + q = a + (p + q).$$

Από την 1.6 (1) έχουμε $p + q \geq 0$, επομένως, από τον Ορισμό 1.4, $a \leq c$.

Η μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας μεταξύ των αριθμών είναι σύμφωνη με τη διαίσθησή μας: Όταν έχουμε τρία τμήματα μεγέθους a, b, c , αντίστοιχα, με $a \leq b$ και $b \leq c$, η κοινή λογική λειπει ότι $a \leq c$.



(4) Αν $a \leq b$ και x είναι ένας αυθαίρετος αριθμός, τότε

$$a + x \leq b + x$$

Απόδειξη. Από την $b = a + p, p \geq 0$ έχουμε $b + x = (a + x) + p$.

(5) Αν $a \leq b$ και c είναι ένας θετικός αριθμός τότε

$$ac \leq bc.$$

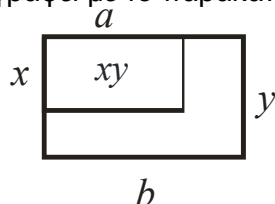
Απόδειξη. Έχουμε $b - a = p \geq 0$. Τότε $pc = (b - a)c \geq 0$. Αυτό δείχνει ότι $bc = ac + pc, pc \geq 0$, και συνεπώς $ac \leq bc$.

(6) Αν $0 \leq a \leq b$ και $0 \leq x \leq y$ τότε $0 \leq ax \leq by$.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι $0 \leq ax$. Για τη δεύτερη ανισότητα εφαρμόζουμε τις ιδιότητες (6) και (3):

$$ax \leq ay \text{ και } ay \leq by \Rightarrow ax \leq by.$$

Η ιδιότητα αυτή μπορεί να περιγραφεί με το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα:

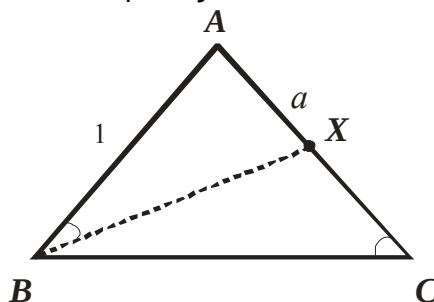


(7) Αν $a > 1$ τότε $\frac{1}{a} < 1$.

Απόδειξη. Θέτουμε $c = \frac{1}{a} > 0$ και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (5) $ac > 1c$. Δηλαδή

$$1 = a \cdot \frac{1}{a} > \frac{1}{a}.$$

Μια γεωμετρική απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ABC με πλευρές $AB = 1, AC = a$. Από αυτό $a > 1, AB < AC$ και επομένως



$\angle B > \angle C$. Στην πλευρά AC , παίρνουμε ένα σημείο X έτσι ώστε $\angle ABX = \angle ACB$. Τα τρίγωνα ABC και AXB είναι όμοια αφού έχουν δύο ίσες γωνίες. Από την αναλογία των πλευρών,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AB} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{AX}{1}.$$

Η πλευρά AX έχει μήκος $\frac{1}{a}$. Στο $\triangle ABX$ έχουμε $AB > AX$ ως πλευρά απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία. Αυτό δείχνει ότι $\frac{1}{a} > 1$.

(8) Αν $0 \leq a \leq b$ τότε $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

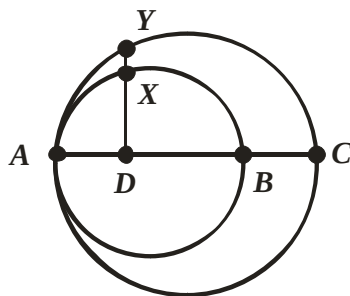
Απόδειξη. Αν $a = b$ τότε $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$. Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $a < b$. Τότε

$b - a > 0$ και $\frac{1}{ab} > 0$. Από την ιδιότητα (2), $(b - a) \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$.

(9) Αν a, b είναι θετικοί αριθμοί και $a < b$ τότε $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Απόδειξη. Έχουμε δει παραπάνω ότι αν $0 < a < b$ τότε $a^2 < b^2$. Υποθέτουμε αντίθετα ότι $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο τη τελευταία ανισότητα έχουμε $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$ ή $a > b$. Αντίφαση.

Υπάρχει και γεωμετρική απόδειξη της ίδιας ιδιότητας. Ο αριθμός $\sqrt{a}$ είναι το μήκος του ύψους από την ορθή γωνία ορθογωνίου τρίγωνο, το οποίο διαιρεί την υποτείνουσα σε τμήματα μήκους 1 και a . Η απόδειξη προκύπτει από την ακόλουθη εικόνα:



Εδώ $AD = 1, BD = a$ και $CD = b$. Τότε $DX = \sqrt{a}, DY = \sqrt{b}$.

1.7. Πρώτες μέθοδοι για απόδειξη ανισοτήτων.

Σε αυτή την παράγραφο θα συνδυάσουμε τις διαισθητικές μεθόδους και τις λογικές αποδείξεις που χρησιμοποιούν τις ιδιότητες που περιγράφηκαν νωρίτερα προκειμένου να αποδειχθούν ή ανακαλυφθούν ανισότητες μεταξύ αριθμών.

1.7.1. Να αποδειχθεί ότι $2^{23} \cdot 5^{20} < 101^7 \cdot 201^3$.

Είναι δύσκολο, ακόμη και με τη χρήση ενός υπολογιστή, να υπολογιστούν αριθμοί όπως οι 2^{23} ή 5^{20} , λόγω του μεγέθους των. Η ιδέα είναι να παρατηρηθεί ότι ο 101 είναι κοντά στον 100 και ο 201 είναι κοντά στον 200. Οι αριθμοί 100 και 200 μπορούν να εμφανιστούν στην αριστερή πλευρά της ανισότητας. Κατά συνέπεια η ζητούμενη ανισότητα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$2^{23} \cdot 5^{20} = 2^{14} \cdot 5^{14} \cdot 2^9 \cdot 5^6 < 101^7 \cdot 201^3.$$

Αυτό πάλι είναι ισοδύναμο με:

$$100^7 \cdot 200^3 < 101^7 \cdot 201^3$$

ή

$$\left(\frac{100}{101}\right)^7 < 1^7 = 1^3 < \left(\frac{201}{200}\right)^3.$$

Τώρα, έχοντας κατά νου τη μεταβατικότητα και δεδομένου ότι ισχύει $\frac{100}{101} < 1 < \frac{201}{200}$, παίρνοντας κύβους έχουμε

$$\left(\frac{100}{101}\right)^3 < 1^3 < \left(\frac{201}{200}\right)^3.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα: $0 < a < b \Rightarrow a^3 < b^3$. Είναι αληθής επειδή ένας κύβος πλευράς a περιέχεται σε έναν κύβο πλευράς b , έτσι ο όγκος του μεγαλύτερου κύβου είναι μεγαλύτερος. Μια λογική απόδειξη μπορεί επίσης να δοθεί με τη χρήση της 1.6. (6).

1.7.2. Γράψτε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς: $3^{12}, 17^4, 7^6$.

Πάλι έχουμε μεγάλους αριθμούς. Η ιδέα είναι να περιορίσουμε το πρόβλημα σε σύγκριση ίσων δυνάμεων κάποιων αριθμών. Έχουμε $17^4 = (17^2)^2 = 289^2$ και $7^6 = (7^3)^2 = 343^2$. Ως εκ τούτου $17^4 < 7^6$. Επίσης $3^{12} = (3^2)^6 = 9^6 > 7^6$. Το συμπέρασμα είναι

$$17^4 < 7^6 < 3^{12}.$$

Από το παράδειγμα αυτό μπορούμε να καταλήξουμε στο διαισθητικό συμπέρασμα ότι οι εκθέτες έχουν σημαντική συμβολή στην αύξηση (μερικών) αριθμών.

1.7.3. Να συγκριθούν οι αριθμοί 2^{880} και 5^{337} .

Πάλι έχουμε μεγάλους αριθμούς. Δεδομένου ότι $880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 11$ έχουμε:

$$2^{880} = (2^5)^{2^4 \cdot 11} = 32^{176} > 25^{176} = 5^{352} > 5^{337}$$

1.7.4. Να συγκριθούν οι αριθμοί $2 + \sqrt{5}$ και $3\sqrt{2}$.

Μια μέθοδος είναι να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής: $2 + \sqrt{5} = 4.23606\dots$ και $3\sqrt{2} = 4.24264\dots$. Έτσι, $2 + \sqrt{5} < 3\sqrt{2}$.

Η λύση ενός μαθηματικού είναι να χρησιμοποιήσει διαδοχικά τις ιδιότητες των ανισοτήτων έως ότου καταλήξει σε μια προφανή ανισότητα:

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{5} < 3\sqrt{2} &\Leftrightarrow (2 + \sqrt{5})^2 < (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 9 + 4\sqrt{5} < 18 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{5} < 9 \Leftrightarrow (4\sqrt{5})^2 < 9^2 \Leftrightarrow 80 < 81. \end{aligned}$$

1.7.5. Δείξτε ότι $\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15} < 10$.

Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο όπως προηγουμένως: η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $\sqrt{10} + \sqrt{15} < 10 - \sqrt{6}$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι $10 - \sqrt{6} > 0$, έτσι είναι επιτρεπτό να τετραγωνίσουμε την ανισότητα:

$$\begin{aligned} \sqrt{10} + \sqrt{15} < 10 - \sqrt{6} &\Leftrightarrow 25 + 2\sqrt{150} < 100 - 20\sqrt{6} \Leftrightarrow \\ 30\sqrt{6} < 81 &\Leftrightarrow 10\sqrt{6} < 27 \Leftrightarrow 600 < 729. \end{aligned}$$

Μια δεύτερη, πιο ευφυής, απόδειξη είναι η ακόλουθη. Χωρίς αλγεβρικούς χειρισμούς διαπιστώνουμε ότι $\sqrt{6} < 2.5$; $\sqrt{10} < 3.5$ και $\sqrt{15} < 4$. Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες κατά μέλη, παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Τώρα θα αυξήσουμε λίγο το επίπεδο δυσκολίας των προβλημάτων μας.

1.7.6. Να αποδειχθεί ότι $4 < \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}} < 5$.

Δεν είναι παραγωγικό να τετραγωνίσουμε ή να υψώσουμε στο κύβο την ανισότητα, ούτε να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικές τιμές των διαδοχικών ριζικών. Μία ευφυής μέθοδος βασίζεται στην παρατήρηση ότι

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{6 + \sqrt{9}} = \sqrt{9} = 3,$$

και

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}} < \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8}}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Προσθέτοντας έχουμε

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}} < 5$$

Για το κάτω φράγμα ακολουθούμε την ίδια ιδέα:

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{4}}} = \sqrt{6 + \sqrt{8}} > \sqrt{6 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 2.8$$

και

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}} > \sqrt[3]{6} > 1.2.$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}} > 2.8+1.2=4.$$

1.7.7. Να αποδειχθεί ότι $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.

Δεδομένου ότι είναι δύσκολο να εργαστεί κανείς με άρρητες δυνάμεις θα τις αντικαταστήσουμε από απλούστερες ρητές προσεγγίσεις.

$$\sqrt{2} = 1.4142... > 1.4 = \frac{7}{5}$$

$$\sqrt{3} = 1.7320 < 1.8 = \frac{9}{5}.$$

Συνεπώς $2^{\sqrt{3}} < 2^{9/5}$ και $3^{\sqrt{2}} > 3^{7/5}$. Είναι αρκετό τώρα να αποδειχθεί ότι $2^{9/5} < 3^{7/5}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $2^9 < 3^7$. Χρησιμοποιώντας ένα υπολογιστή έχουμε $2^9 = 512$, $3^7 = 2187$, οπότε τελειώσαμε, αλλά ένας μαθηματικός θα εργαστεί ως εξής:

$$2^9 = (2^3)^3 = 8^3 < 9^3 = 3^6 < 3^7.$$

1.7.8. Μια γενική ανισότητα: αν a, b, a', b' είναι θετικοί αριθμοί τότε $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ αν και μόνο αν $ab' < a'b$.

Απόδειξη. $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} > 0$. Το τελευταίο κλάσμα είναι θετικό εάν και μόνο εάν ο αριθμητής και ο παρονομαστής έχουν τα ίδια πρόσημα. Αφού $b'b > 0$, έπεται $a'b - ab' > 0$ και άρα $a'b > ab'$.

Ως εφαρμογή αυτής της μεθόδου προτείνουμε το ακόλουθο πρόβλημα.

1.7.9. Έστω ότι a, b, c, d είναι θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Λύση. Δεδομένου ότι $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ έχουμε $ad < bc$. Επίσης,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d) < b(a+c) \Leftrightarrow ad < bc$$

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d < (b+d)c \Leftrightarrow ad < bc.$$

Ως εφαρμογή των τελευταίων δύο προβλημάτων θα δείξουμε πώς μπορούν να ληφθούν νέες ανισότητες.

Έστω ότι οι m, n είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $m < n$. Τότε

$$\frac{m}{m+1} < \frac{n}{n+1}. \text{ Πράγματι } m(n+1) < n(m+1) \Leftrightarrow m < n. \text{ Από την 1.7.8 έπεται ότι}$$

$$\frac{m}{m+1} < \frac{m+n}{m+n+2} < \frac{n}{n+1}.$$

Αποδείξαμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

1.7.10. Έστω m, n θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $m < n$. Τότε

$$\frac{m}{m+1} < \frac{k}{k+2} < \frac{n}{n+1}$$

για όλους τους $k, 2m < k < 2n$.

Δεδομένου ότι έχουμε χρησιμοποιήσει την 1.7.8, θα την ονομάζουμε *βασική ανισότητα*. Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιαστούν και άλλες βασικές ανισότητες.

Για να κλείσουμε αυτή την παράγραφο, παρουσιάζουμε μια νέα μέθοδο για την απόδειξη ανισοτήτων.

1.7.11. Άθροισμα τετραγώνων. Για όλους τους αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$ ισχύει

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$$

και ισχύει η ισότητα εάν και μόνο εάν $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Αυτό είναι συνέπεια των ιδιοτήτων 1.6. (1) και 1.6. (2).

Για να δείξουμε τη δύναμη αυτής της μεθόδου παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα.

1.7.12. Να αποδειχθεί ότι για όλους τους αριθμούς x , ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες: $x^2 + x + 1 > 0$ και $x^2 - x + 1 > 0$.

Απόδειξη. $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ και $(x^2 - x + 1)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

1.7.13. Έστω a, b, c, d πραγματικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι μεταξύ των αριθμών $a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2$ τουλάχιστον ένας είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{1}{4}$.

Απόδειξη. Έστω αντίθετα ότι

$$a - b^2 > \frac{1}{4}; \quad b - c^2 > \frac{1}{4}; \quad c - d^2 > \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad d - a^2 > \frac{1}{4}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$(a + b + c + d) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) > 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 0.$$

Με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, λαμβάνουμε

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 < 0.$$

Αντίφαση.

§2. Μερικές βασικές στοιχειώδεις ανισότητες

Μερικές ανισότητες παίζουν έναν κύριο ρόλο στη θεωρία των ανισοτήτων, και γι' αυτό καλούνται βασικές ανισότητες. Εισάγουμε τον αναγνώστη στον κόσμο τους και εξηγούμε γιατί είναι σημαντικές.

2.1. Το δευτεροβάθμιο τριώνυμο και αθροίσματα τετραγώνων.

Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί, $a > 0$ και έστω $f(x) = ax^2 + bx + c$ ένα τριώνυμο. Αν $b^2 < 4ac$ τότε $f(x) > 0$ για όλους πραγματικούς x .

Απόδειξη. $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} > 0$. Το συμπέρασμα έπεται με τη χρήση του επιχειρήματος "άθροισμα τετραγώνων".

Ο αριθμός $\Delta = b^2 - 4ac$ καλείται *διακρίνουσα* του τριωνύμου f .

Ακολουθούν παραδείγματα χρήσης του θεωρητικού αυτού υπόβαθρου.

2.1.1. Παράδειγμα. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 3xy + 1 \geq 0.$$

Λύση. Είναι $x^2y^2 + x^2 - 3xy + y^2 + 1 = (y^2 + 1)x^2 - 3yx + (y^2 + 1)$. Θέτουμε τώρα $a = y^2 + 1, b = 3y$ και $c = y^2 + 1$, οπότε λαμβάνουμε το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + c$. Τότε

$$4ac - b^2 = 4(y^2 + 1)^2 - 9y^2 = 4y^4 + 8y^2 + 4 - 9y^2 = 4y^4 - y^2 + 4.$$

Παίρνουμε πάλι ένα τριώνυμο, αυτήν τη φορά το $g(y) = 4(y^2)^2 - y^2 + 4$ για το οποία $b^2 - 4ac = 1 - 16 < 0$. Έτσι, $4y^4 - y^2 + 4 > 0$ για κάθε y και άρα $f(x) > 0$, για κάθε x και y .

Εναλλακτική λύση.

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 3xy + 1 = (x^2y^2 - xy + 1) + (x - y)^2 = \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + (x - y)^2,$$

και χρησιμοποιήστε το επιχείρημα αθροίσματος τετραγώνων της 1.7.10.

Αυτή η λύση απαιτεί την ικανότητα να μπορεί να δημιουργεί κανείς τα τετράγωνα. Εάν δεν την έχουμε, χρησιμοποιούμε το τριώνυμο.

2.1.2. Παράδειγμα. Για όλους τους αριθμούς a, b, c ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Λύση. Γράφουμε την ανισότητα στη μορφή τριωνύμου της μεταβλητής a :

$$f(x) = a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc \geq 0$$

Η διακρίνουσά του είναι

$$\Delta = (b+c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b^2 + c^2 - 2bc) = -3(b-c)^2 \leq 0.$$

Έτσι $f(a) \geq 0$, για κάθε a .

Υπάρχει μια *εναλλακτική απόδειξη* που προκύπτει αμέσως από το άθροισμα τετραγώνων: Η

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$$

είναι ισοδύναμη με την

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0.$$

Ομαδοποιώντας τώρα κατάλληλα λαμβάνουμε:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Παρατήρηση. Ο αναγνώστης καλείται για να συγκρίνει το πλεονέκτημα ή/και το μειονέκτημα κάθε μιας από αυτές τις αποδείξεις.

Η βασική ανισότητα 2.1.2 έχει πολλές παραλλαγές που είναι κομψό τμήμα των μαθηματικών.

2.1.3. *Παράδειγμα.* Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

$$(i) \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

$$(ii) \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

Λύση. (i) Η δεδομένη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Με χρήση της βασικής ανισότητας 2.1.2 για τους αριθμούς ab, bc, ca έχουμε:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(a + b + c).$$

(ii) Με χρήση της βασικής ανισότητας για τους αριθμούς $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ παίρνουμε:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}.$$

2.2. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Αρχίζουμε με την ακόλουθη βασική ανισότητα που παρατηρήθηκε από τον Titu Andreescu.

2.2.1. Για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς x, y και αυθαίρετους αριθμούς a, b ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι ισοδύναμη προς την

$$(a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0.$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι ισχύει η ισότητα εάν και μόνο εάν $ay - bx = 0$, δηλαδή εάν και μόνον εάν

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

Η ανισότητα 2.2.1 μπορεί να γενικευθεί για μεγαλύτερες οικογένειες αριθμών.

2.2.2. Για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς x, y, z και αυθαίρετους αριθμούς a, b, c ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι να εφαρμοστεί επανειλημμένα το προηγούμενο επιχείρημα:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι για τους περισσότερους αριθμούς, ισχύει η ανισότητα

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

για όλους τους $a_1, a_2, \dots, a_n$ και όλους τους θετικούς αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$. Η απόδειξη είναι η ίδια (τελικά με επαγωγή!).

Περιοριζόμαστε στην περίπτωση των οικογενειών τριών αριθμών, (a_1, a_2, a_3) και (b_1, b_2, b_3) . Στην ανισότητα 2.2.2 θέτουμε

$$a = a_1b_1, b = a_2b_2, c = a_3b_3, x = b_1^2, y = b_2^2, z = b_3^2$$

και παίρνουμε

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2} + \frac{a_3^2b_3^2}{b_3^2} \geq \frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Επομένως, έχουμε την ακόλουθη ανισότητα:

$$2.2.3. \quad (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

η οποία καλείται *ανισότητα Cauchy-Schwarz*.

Υπάρχει *εναλλακτική απόδειξη* της 2.2.3. Εάν αφαιρέσουμε το αριστερό μέλος από το δεξί παίρνουμε

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ & = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2. \end{aligned}$$

Η τελευταία καλείται *ταυτότητα του Lagrange*. Επειδή το δεξί μέλος της ταυτότητας Lagrange είναι θετικό, η ανισότητα Cauchy - Schwarz είναι συνέπεια της.

Η ανισότητα Cauchy - Schwarz είναι μια από τις διασημότερες ανισότητες στα μαθηματικά. Πολύ συχνά χρησιμοποιείται σε διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών όπως στην Γεωμετρία, τον Απειροστικό Λογισμό, την Θεωρία Συναρτήσεων και λοιπά. Χάριν συντομίας θα την αποκαλούμε *ανισότητα C-S*.

Αναφέρουμε ότι η ισότητα στην ανισότητα C-S εμφανίζεται εάν και μόνο εάν ισχύουν οι αναλογίες

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Οι επόμενες εφαρμογές αφιερώνονται για να δείξουν πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ανισότητα C-S για να πάρουμε νέες ανισότητες. Το κύριο στοιχείο σε αυτές τις ασκήσεις είναι να αναγνωρίσουμε ότι προκύπτουν από την ανισότητα C-S.

2.2.4. Για όλους τους αριθμούς a, b, c ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Λύση. Εφαρμόζουμε την ανισότητα C-S στα συστήματα (a, b, c) και $(1, 1, 1)$.

Αξίζει να σχολιάσουμε την 2.2.4. Μετά από τις πράξεις παίρνουμε:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Αυτή είναι ακριβώς η ανισότητα 2.1.2.

Μην ξεχνάμε: μια ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί με διαφορετικούς τρόπους.

2.2.5. Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Απόδειξη.

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

2.2.6. Παράδειγμα. Έστω $a, b, x, y > 0$ τέτοια ώστε $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Τότε

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a+b}.$$

Απόδειξη.

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{a+b} \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq a+b \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a+b}.$$

Η ακόλουθη ανισότητα προτάθηκε από τον Nesbitt το 1903 και είναι διάσημη για το εύρος των εφαρμογών της και για τις πολλές κομψές αποδείξεις που επιδέχεται.

2.2.7. (Nesbitt) Για οποιουδήποτε αριθμούς $a > 0, b > 0, c > 0$ ισχύει

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Για την απόδειξη, εφαρμόζουμε την 2.2.2:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε 2.1.2: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Στις επόμενες παραγράφους θα δοθούν και άλλες αποδείξεις. Η προηγούμενη είναι μια από τις πιο σύντομες αποδείξεις της ανισότητας Nesbitt. Η ακόλουθη ανισότητα έχει επίσης διάφορες αποδείξεις.

2.2.8. Παράδειγμα. Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a+b+c).$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας το αριστερό μέλος επί $c+a+b$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα C-S παίρνουμε:

$$(c+a+b)(a^3b + b^3c + c^3a) \geq (a\sqrt{abc} + b\sqrt{abc} + c\sqrt{abc})^2 = abc(c+a+b)^2$$

Το ζητούμενο τώρα έπεται αν απλοποιήσουμε το $a+b+c$.

Εναλλακτική λύση. Η δεδομένη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a+b+c.$$

Με αυτήν την μορφή, είναι αρκετό να εφαρμόσει κανείς την 2.2.2

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c.$$

2.3. *Ανισότητα Schur.* Για όλους τους θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι συμμετρική ως προς x, y, z οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < x \leq y \leq z$. Σε αυτήν την περίπτωση, το πρώτο μέλος του αθροίσματος είναι μη αρνητικό. Τα υπόλοιπα δύο μέλη έχουν άθροισμα

$$(y-z)(y^2 - xy - z^2 + zx) = (y-z)[(y-z)(y+z) - x(y-z)] = (y-z)^2(y+z-x) \geq 0.$$

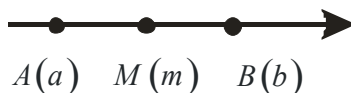
Επισημαίνουμε ότι η προηγούμενη απόδειξη εισάγει νέες ιδέες στην απόδειξη ανισοτήτων: την δυνατότητα για να διαταχθούν οι αριθμοί και τη διάσπαση ενός αθροίσματος σε δύο θετικά μέρη;

§3. Ανισότητες μέσων

Ο *αριθμητικός μέσος* (AM) δύο αριθμών a, b είναι, εξ ορισμού, ο μέσος όρος των αριθμών. Δηλαδή

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του AM είναι: το $M(m)$ είναι το μεσαίο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $A(a)$ και $B(b)$ στον πραγματικό άξονα.



Ο αριθμητικός μέσος τριών αριθμών a, b, c είναι, εξ ορισμού, ο αριθμός

$$m = \frac{a+b+c}{3}$$

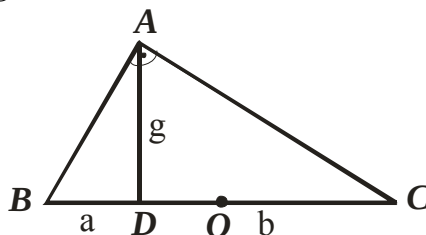
και, γενικότερα, ο αριθμητικός μέσος n αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι ο αριθμός

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Ο *γεωμετρικός μέσος* (GM) δύο θετικών αριθμών a, b είναι ο αριθμός

$$g = \sqrt{ab}.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του είναι πολύ ενδιαφέρουσα. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ABC , και έστω D το ίχνος του ύψους από την ορθή γωνία A . Εάν τα τμήματα που καθορίζονται από το D στην υποτείνουσα BC έχουν μήκη $BD = a, DC = b$ τότε το ύψος AD έχει το μήκος $g = \sqrt{ab}$.



Ο γεωμετρικός μέσος τριών αριθμών είναι εξ ορισμού ο

$$g = \sqrt[3]{abc}$$

και ο γεωμετρικός μέσος n θετικών αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι ο

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Ο αρμονικός μέσος (HM) δύο θετικών αριθμών a, b είναι ο αριθμός

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Σημειώστε τις ακόλουθες ταυτότητες

$$g^2 = mh \text{ και } \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Ο αρμονικός μέσος n θετικών αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι ο

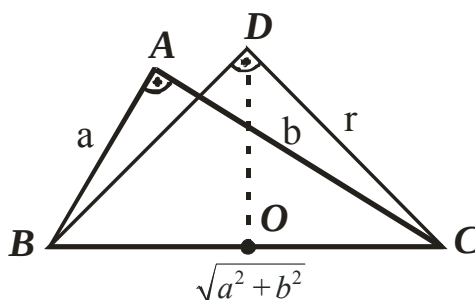
$$h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Το τετραγωνικός μέσος (QM) δύο θετικών αριθμών a, b είναι ο αριθμός

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Και αυτός έχει επίσης μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία με βάση τα ορθογώνια τρίγωνα. Έστω ABC ορθογώνιο τρίγωνο με $\angle A = 90^\circ$. Εξετάζουμε το ημικύκλιο επί της διαμέτρου BC που περιέχει την κορυφή A και έστω D το μέσο της περιφέρειας αυτού του ημικυκλίου. Το $\triangle BDC$ είναι βέβαια ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο. Εάν $AB = a, AC = b$ είναι κάθετες πλευρές του $\triangle ABC$, τότε είναι

$$BD = CD = r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$



Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι

$$2m^2 = g^2 + r^2,$$

έτσι ο αριθμητικός μέσος είναι ο τετραγωνικός μέσος του γεωμετρικού μέσου όρου και του τετραγωνικού μέσου των δεδομένων αριθμών.

Ομοίως, ο τετραγωνικός μέσος (QM) n αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι εξ ορισμού ο

$$r = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Μερικοί φορές ο QM αναφέρεται και ως μέση τετραγωνική τιμή (RMS).

3.1. Ανισότητες των μέσων δύο αριθμών.

Για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς a, b ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Αρχίζουμε με την ανισότητα GM - AM.

$$3.1.1. \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

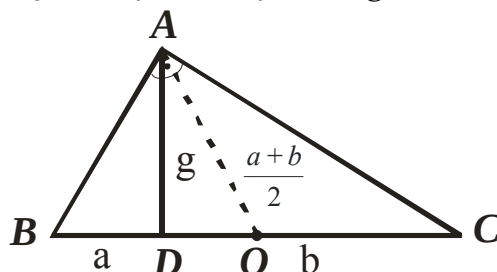
Υπάρχουν διάφορες αποδείξεις, τόσο αλγεβρικές όσο και γεωμετρικές.

Πρώτη απόδειξη. Επειδή οι αριθμοί στην 3.1.1 είναι θετικοί αριθμοί, μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, οπότε έχουμε:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Η απόδειξη μας δίνει τη δυνατότητα να συμπεράνουμε ότι ισχύει η ισότητα στην 3.1.1 εάν και μόνο εάν $a = b$.

Δεύτερη απόδειξη. Επανεξετάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABC , $\angle A = 90^\circ$, του οποίου το μήκος του ύψους από την κορυφή A είναι g .



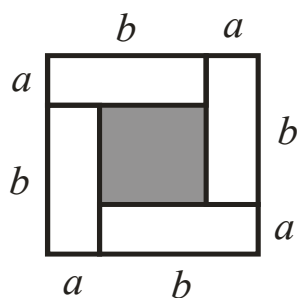
Έστω O το μέσο της υποτείνουσας BC . Είναι τότε

$$AO = BO = CO = \frac{a+b}{2}.$$

Αφού η AD είναι κάθετος από το A στην ευθεία BC και η AO είναι πλάγια, έχουμε $AD \leq AO$, δηλαδή $g \leq m$.

Ισχύει ισότητα εάν και μόνο εάν $D = O$, δηλαδή όταν το ύψος είναι επίσης διάμεσος. Έπεται ότι $a = b$.

Τρίτη απόδειξη. Κατασκευάζουμε τέσσερα ορθογώνια διαστάσεων $a \times b$, $a \leq b$ και τα τοποθετούμε όπως στο κατωτέρω σχήμα.



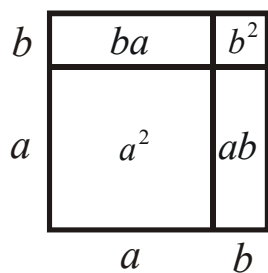
Το εσωτερικό τετράγωνο έχει διαστάσεις $(b-a) \times (b-a)$, οπότε έχει εμβαδόν $(b-a)^2$. Συγκρίνοντας εμβαδά έχουμε

$$(a+b)^2 = 4ab + (b-a)^2.$$

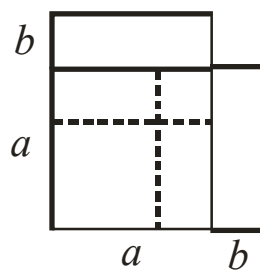
Από αυτό λαμβάνουμε $(a+b)^2 \geq 4ab$ και, παίρνοντας τετραγωνική ρίζα,

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Τέταρτη απόδειξη. Έστω $a > b$ θετικοί αριθμοί. Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς $a+b$ και το διαιρούμε σε 2 τετράγωνα και δύο ορθογώνια όπως στο Σχήμα 1 κατωτέρω. Κατόπιν, αφαιρούμε μικρό τετράγωνο όπως στο Σχήμα 2 και διπλώνουμε τα ορθογώνια προς τα μέσα, επάνω στο μεγάλο τετράγωνο.



Σχήμα 1



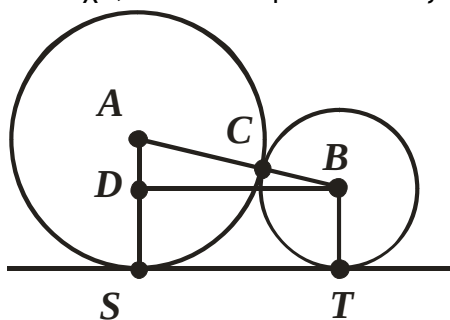
Σχήμα 2

Κάθε ορθογώνιο θα καλύψει μια περιοχή ab και η περιοχή b^2 του μικρού τετραγώνου θα καλυφθεί δύο φορές. Δεδομένου ότι κάποια περιοχή παραμένει ακόμα ακάλυπτη, έχουμε

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Αυτή ακριβώς είναι η ανισότητα GM – AM των αριθμών a^2 και b^2 .

3.1.2. *Μια απόδειξη που χρησιμοποιεί κύκλους.* Έστω C_A, C_B δύο κύκλοι κέντρων A, B και ακτίνων a, b , αντίστοιχα, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο C .



Έστω ότι η κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων είναι η ST . Το μήκος του είναι

$$ST = DB = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}.$$

Από γεγονός ότι η DB είναι η μία κάθετος πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ADB , έχουμε $BD \leq AB$. Έτσι $2\sqrt{ab} \leq a+b$, δηλαδή η ανισότητα GM - AM

Η ανισότητα HM - GM,

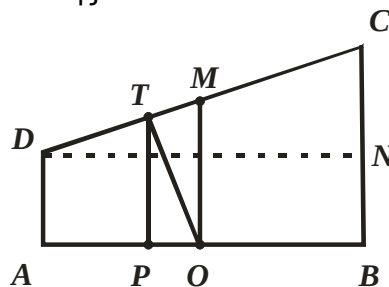
$$3.1.3. \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

είναι άμεση συνέπεια της GM - AM εφαρμοσμένης στους αριθμούς $\frac{1}{a}$ και $\frac{1}{b}$:

$$\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

3.1.4. Νέα γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων HM - GM - AM.

Εξετάζουμε ένα ορθογώνιο τραπέζιο $ABCD$ με $\angle A = \angle B = 90^\circ$ και η πλευρά CD να εφάπτεται του κύκλου διαμέτρου AB σε ένα σημείο T . Έστω P η προβολή του σημείου T στην AB , O το μέσο του τμήματος AB και M το σημείο τομής της CD με την κάθετο στο μέσο O της AB .



Εάν θέσουμε $AD = a$, $BC = b$, $a < b$, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$OM = \frac{a+b}{2}, \quad OT = \sqrt{ab}, \quad PT = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Για την απόδειξη, έστω N η προβολή του D στην BC . Στο ορθογώνιο τρίγωνο DNC έχουμε $DC = a+b$ (διότι η DC εφάπτεται του κύκλου και είναι $DC = DT + TC = DA + CB = a+b$) οπότε

$$DN^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

Αλλά $DN = 2AO = 2OT$, οπότε $OT = \sqrt{ab}$.

Επίσης $\angle PTO = \angle CDN$, διότι έχουν κάθετες πλευρές. Άρα τα $\triangle TPO$ και $\triangle DNC$

είναι όμοια. Από την αναλογία $\frac{PT}{TO} = \frac{DN}{DC}$ παίρνουμε

$$PT = TO \cdot \frac{DN}{DC} = \sqrt{ab} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Τέλος, η MO είναι η μεσοπαράλληλος του τραπεζίου $ABCD$, ως εκ τούτου $MO = \frac{a+b}{2}$. Είναι προφανές από τα ορθογώνια τρίγωνα TPO και OTM ότι $PT \leq TO \leq MO$. Συνεπώς,

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

3.1.5. Η ανισότητα AM - QM

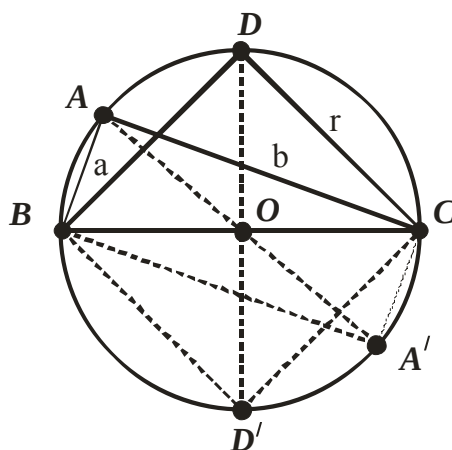
$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

μπορεί να αποδειχθεί υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη, οπότε

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+2ab}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow 2ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Η τελευταία όμως είναι ακριβώς η ανισότητα GM - AM για τους αριθμούς a^2, b^2 .

3.1.6. Η ανισότητα AM - QM έχει επίσης μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία. Ας θυμηθούμε πρώτα την γεωμετρική ερμηνεία του QM: είναι το μήκος της κάθετης πλευράς ορθογώνιου ισοσκελούς τριγώνου που εγγράφεται σε κύκλο διαμέτρου $\sqrt{a^2+b^2}$.



Έστω A', D' τα συμμετρικά των σημείων A, D ως προς το κέντρο O , αντίστοιχα. Τότε το $ABA'C$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλευρών a, b και το $BDCD'$ είναι τετράγωνο πλευράς r . Πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα 3.1.4 επί 4 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα: μεταξύ όλων των ορθογώνιων που εγγράφονται σε έναν δεδομένο κύκλο, το τετράγωνο έχει τη μέγιστη περίμετρο.

Στο τέλος της παραγράφου θα παρουσιάσουμε μερικές στοιχειώδεις ανισότητες οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες των ανισοτήτων HM - GM και GM - AM.

3.1.7. Για οποιοδήποτε θετικό αριθμό x ισχύει

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

με ισότητα εάν και μόνο εάν $x = 1$.

Πράγματι, από GM -AM την ανισότητα έχουμε

$$1 = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}$$

και η ισότητα εμφανίζεται όταν $x = \frac{1}{x}$, ή $x = 1$.

3.1.8. Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c , ισχύει

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq abc.$$

Για την απόδειξη, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισότητες

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

3.1.9. Μεταξύ όλων των ορθογωνίων που εγγράφονται σε έναν δεδομένο κύκλο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Απόδειξη. Έστω a, b οι πλευρές του ορθογωνίου. Από την ανισότητα GM - AM

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

με ισότητα όταν $a = b$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

3.1.10. Μια νέα απόδειξη της ανισότητας 2.2.7.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}.$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί την ανισότητα GM - AM. Η ιδέα είναι να θέσουμε $b+c=x, c+a=y, a+b=z$ με το στόχο να μετασχηματιστεί η παράσταση σε μια καταλληλότερη μορφή. Θα είναι τότε

$$a = \frac{-x+y+z}{2}, \quad b = \frac{x-y+z}{2}, \quad c = \frac{x+y-z}{2}$$

και η ανισότητα, ως προς τις νέες μεταβλητές, γράφεται

$$\frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}.$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6,$$

που ισχύει καθώς, από την ανισότητα GM - AM, κάθε παρένθεση είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2.

3.2. Ανισότητες μέσω των τριών αριθμών.

Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

και οι ισότητες εμφανίζονται εάν και μόνο εάν $a = b = c$.

Όπως στην περίπτωση δύο αριθμών, το κύριο σημείο είναι να αποδειχθεί η ανισότητα μεταξύ του GM και του AM.

$$3.2.1. \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Μία απόδειξη βασίζεται στην ακόλουθη κλασσική ταυτότητα (του Euler):

$$3.2.2. \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

η οποία ισχύει για αυθαίρετους πραγματικούς αριθμούς a, b, c .

Για τους θετικούς αριθμούς a, b, c , έχουμε $a+b+c > 0$ και από τη γενική ανισότητα

2.1.2. έχουμε επίσης $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$. Έπεται αμέσως ότι $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Εάν αντικαταστήσουμε τα a, b, c από τα $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c}$ θα λάβουμε την ζητούμενη ανισότητα. Η ισότητα στην 3.2.2 εμφανίζεται εάν και μόνο εάν $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, που συμβαίνει εάν και μόνο εάν $a = b = c$.

3.2.3. Η ανισότητα HM - GM

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$$

προκύπτει από την ανισότητα GM - AM, εφαρμοσμένη στους αριθμούς $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

3.2.4. Η ανισότητα AM - QM

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

δεν είναι νέα. Με ύψωση στο τετράγωνο λαμβάνει την μορφή

$$3.2.5. \quad (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

όποια είναι η ανισότητα 2.2.4.

Η ανισότητα GM - QM για τρεις αριθμούς έχει μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία. Έστω $ABCD A' B' C' D'$ ένα παραλληλεπίπεδο με πλευρές μήκους

a, b, c . Τότε η διαγώνιος του AC' έχει μήκος $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Η σφαίρα που περιγράφεται στο παραλληλεπίπεδο έχει την ακτίνα $R = \frac{1}{2}d$. Ο κύβος που

εγγράφεται στη σφαίρα έχει την πλευρά του μήκους ℓ , όπου $d = \sqrt{3}\ell^2 = \ell\sqrt{3}$. Έπεται ότι

$$\ell = \frac{d}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

Επομένως, η ανισότητα AM - QM σε συνδυασμό με την ανισότητα GM - AM λέει: μεταξύ όλων των παραλληλεπιπέδων που εγγράφονται σε μια σφαίρα, ο κύβος έχει το μέγιστο όγκο:

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \leq \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \right)^3.$$

Αυτό το αποτέλεσμα ανακαλύφθηκε από τον διάσημο Γερμανό μαθηματικό και αστρονόμο Johannes Kepler (1571-1630).

Θα παρουσιάσουμε μερικές κλασσικές ανισότητες που λαμβάνονται με τη χρήση των ανισοτήτων των μέσων.

3.2.6. Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύει

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Απόδειξη. Εφαρμόστε την ιδιότητα 1.7.9 στην ανισότητα HM-AM

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

3.2.7. Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)(ab+bc+ca) = \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) abc \geq 9abc. \end{aligned}$$

3.2.8. Για όλους τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύει

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24abc.$$

Για την απόδειξη θα συνδυάσουμε την GM - AM για τρεις αριθμούς με την αντίστοιχη για δύο:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 &\geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq 3(2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca}) = \\ &= 24abc. \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Vasile Berinde, Filippo Spagnolo

Η Θεωρία Αριθμών είναι ένας από τους παλαιότερους κλάδους των μαθηματικών και συγχρόνως ένας από τους μεγαλύτερους. Το παρόν κεφάλαιο έχει στόχο να παράσχει μια στοιχειώδη εισαγωγή στη Θεωρία Αριθμών. Αυτό θα επιτευχθεί με την παράθεση μιας σειράς ασκήσεων και προβλημάτων η οποία προϋποθέτει λίγες μόνο βασικές γνώσεις των ιδιοτήτων των ακεραίων αριθμών. Ειδικά, θα εξεταστούν θέματα όπως η διαιρετότητα μεταξύ ακεραίων, ο ευκλείδειος αλγόριθμος και η ύπαρξη του μέγιστου κοινού διαιρέτη, στοιχειώδεις ιδιότητες των πρώτων αριθμών, μερικές ειδικές περιπτώσεις Διοφαντικών εξισώσεων και διάφορα άλλα θέματα.

§1. Διαιρετότητα των ακεραίων αριθμών

Θα συμβολίζουμε με $\mathbf{N}$ το σύνολο θετικών ακεραίων (ή φυσικών) αριθμών. Λέμε ένας $a \in \mathbf{N}$ είναι διαιρετός από τον $b \in \mathbf{N}$ ή, ισοδύναμα, ο b διαιρεί τον a , εάν υπάρχει $c \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε

$$a = b \cdot c.$$

Συμβολίζουμε αυτή την ιδιότητα ως $b|a$ και καλούμε τον b έναν *διαιρέτη* ή έναν *παράγοντα* a . Λέμε επίσης ότι ο a είναι ένα *πολλαπλάσιο* του b .

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να εφαρμοστεί, γενικότερα, και σε μη μηδενικούς ακεραίους αριθμούς, αλλά σε αυτά που ακολουθούν θα περιοριστούμε στους θετικούς ακεραίους.

Σε ότι ακολουθεί, με εξαίρεση την τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, όλοι οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται ότι είναι γραμμένοι στο δεκαδικό σύστημα της αρίθμησης.

Υπενθυμίζουμε στα ακόλουθα στοιχειώδη κριτήρια διαιρετότητας:

- 1) Ένας αριθμός $a \in \mathbf{N}$ είναι πολλαπλάσιο του 2 εάν το τελευταίο ψηφίο του είναι άρτιος αριθμός (δηλαδή πολλαπλάσιο του 2).
- 2) Ένας αριθμός $a \in \mathbf{N}$ είναι πολλαπλάσιο του 5 εάν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.
- 3) Ένας αριθμός $a \in \mathbf{N}$ είναι πολλαπλάσιο του 3 εάν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3.
- 4) Ένας αριθμός $a \in \mathbf{N}$ είναι πολλαπλάσιο του 9 εάν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9.
- 5) Ένας αριθμός $a \in \mathbf{N}$ είναι πολλαπλάσιο του 10^n εάν τα n τελευταία ψηφία του είναι μηδενικά.

1.1. Δείξτε ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο περιττών αριθμών ή δύο άρτιων αριθμών είναι πάντα άρτιος αριθμός.

Λύση. Έστω ότι m και n περιττοί φυσικοί αριθμοί, δηλαδή, $m = 2p + 1$, $p \in \mathbf{N}$ και $n = 2r + 1$, $r \in \mathbf{N}$. Τότε $a + b = 2(p + r + 1)$ και $a - b = 2(p - r)$, τα οποία είναι και τα δύο άρτιοι αριθμοί. Η περίπτωση όταν m και n είναι και οι δύο άρτιοι αντιμετωπίζεται παρόμοια.

Ασκήσεις (1)

1.2. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό n , ο 2 διαιρεί τον $n(n + 1)$.

1.3. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό n , ο 3 διαιρεί τον $n(n + 1)(n + 2)$.

1.4. Βρείτε έναν φυσικό αριθμό x έτσι ώστε ο $\overline{2x5}$ να είναι πολλαπλάσιο του 3 (αντίστοιχα, του 9).

1.5. Δείξτε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών κύβων δεν είναι ποτέ πολλαπλάσιο του 2.
Λύση. Έχουμε $(n+1)^3 - n^3 = 3n(n+1) + 1$ και δεδομένου ότι $n(n+1)$ είναι άρτιος (Άσκηση 1,2) συμπεραίνουμε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών κύβων είναι πάντα περιττός αριθμός.

1.6. Προσδιορίστε το τελευταίο ψηφίο του 7^{2003} .

Λύση. Συμβολίζουμε με $ld(u)$ το τελευταίο ψηφίο ενός φυσικού αριθμού u . Έχουμε λοιπόν $ld(7^1) = 7$; $ld(7^2) = 9$; $ld(7^3) = 3$; $ld(7^4) = 1$..., και ο κύκλος 7, 9, 3, 1 επαναλαμβάνεται. Από το γεγονός ότι $2003 = 4 \cdot 500 + 3$, συμπεραίνουμε ότι $ld(7^{2003}) = 3$.

1.7. Δείξτε ότι ο $N = 1996^{1998} + 1997^{1999} + 1998^{2000}$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

Λύση. Το τελευταίο ψηφίο του 1996^{1998} είναι 6. Το τελευταίο ψηφίο του 1997^{1999} είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του 7^{1999} , το οποίο είναι 3 (διότι $1999 = 4 \cdot 494 + 3$) και το τελευταίο ψηφίο του 1998^{2000} είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του 8^{2000} , το οποίο είναι 6 (διότι ο 2000 είναι πολλαπλάσιο του 4).

Έτσι, το τελευταίο ψηφίο του N θα είναι ίσο με το τελευταίο ψηφίο του $6 + 3 + 6 = 15$, δηλαδή 5, και επομένως ο N είναι πολλαπλάσιο του 5.

1.8. Δείξτε ότι ο $N = 1983^{1986} + 1984^{1986} + 1985^{1986}$ είναι πολλαπλάσιο του 10.

1.9. Δείξτε ότι για οποιουδήποτε $n \in \mathbf{N}$, ο $a = 5^{2n+3} \cdot 9^{n+2} + 3^{2n+1} \cdot 25^{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 17.

1.10. Δείξτε ότι για οποιουδήποτε $n \in \mathbf{N}$, ο $a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 13.

1.11. Αποδείξτε το κριτήριο διαιρετότητας του 3 και του 9.

§2. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

Ένας φυσικός αριθμός $p > 1$ καλείται *πρώτος αριθμός* εάν έχει μόνο δύο διαιρέτες: τον 1 και τον εαυτό του. Διαφορετικά, καλείται *σύνθετος αριθμός*. Οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο των πρώτων διαιρετών του.

Ένας φυσικός αριθμός καλείται *μέγιστος κοινός διαιρέτης* δύο φυσικών αριθμών a και b , εάν

1) $d | a$ και $d | b$

2) εάν $c | a$ και $c | b$ τότε $c | d$.

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο φυσικών αριθμών a και b είναι μοναδικός και συμβολίζεται συνήθως ως $\mu\kappa\delta(a, b)$ ή $\gcd(a, b)$ ή, απλά, (a, b) .

Παράδειγμα 1. Έχουμε $\gcd(24, 90) = 6$ καθώς

$$24 = 2^3 \cdot 3 \text{ και } 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Δύο φυσικοί αριθμοί a και b για τους οποίους ισχύει $\gcd(a, b) = 1$ καλούνται *σχετικά πρώτοι* αριθμοί.

Σημείωση. Εάν $\gcd(a, b) = 1$ τότε $ab | n$ εάν και μόνο εάν $a | n$ και $b | n$.

Παράδειγμα 2. Έστω $n = 360$, $a = 24$ και $b = 90$. Τότε $a | n$ και $b | n$ (δείτε το προηγούμενο παράδειγμα), αλλά ο n δεν είναι πολλαπλάσιο του $a \cdot b$. Παρατηρείστε ότι εδώ $\gcd(a, b) = 6 \neq 1$.

Άσκησης (2)

2.1. Δίνεται φυσικός αριθμός της μορφής $\overline{21x}$. Να προσδιοριστεί το ψηφίο x αν ο αρχικός αριθμός είναι πολλαπλάσιο α) του 5, β) του 6 ή γ) του 12.

2.2. Βρείτε όλους τους αριθμούς της μορφής $\overline{2x3y}$ που είναι πολλαπλάσια του 15.

2.3. Βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο φυσικό αριθμό της μορφής $\overline{619x7y}$ που είναι πολλαπλάσιο του 18.

2.4. Βρείτε τα x και y αν ο 45 διαιρεί τον $\overline{4xy}$.

2.5. Δείξτε ότι ο αριθμός $a = 3 + 3^2 + \dots + 3^{1986}$ είναι πολλαπλάσιο του 156.

2.6. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε $n > 1$, οι αριθμοί της μορφής $a = 15^{n+1} + 3^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 27.

2.7. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$, ο αριθμός $a = 2^n \cdot 5^n + 1988$ είναι πολλαπλάσιο του 18.

2.8. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$, ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 30.

2.9. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$, ο αριθμός $a = 2^{2n+1} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{n+1} + 4^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^n$ είναι πολλαπλάσιο του 1980.

2.10. Έστω $a, b \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι εάν ο $3a + 5b$ είναι πολλαπλάσιο του 17, τότε συμβαίνει το ίδιο και για τον $4a + b$. Ισχύει το αντίστροφο;

2.11. Δείξτε ότι $31|5x + 7y$ εάν και μόνο εάν $31|11x + 3y$ ($x, y \in \mathbf{N}$).

2.12. Δείξτε ότι $17|5x + 8y$ εάν και μόνο εάν $17|4x + 3y$ ($x, y \in \mathbf{N}$).

2.13. Δείξτε ότι $13|3x + 4y$ εάν και μόνο εάν $13|2x + 7y$ ($x, y \in \mathbf{N}$).

2.14. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τα ακόλουθα ζεύγη αριθμών είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί:

α) $6n + 5$ και $7n + 6$, β) $10n + 3$ και $15n + 4$, γ) $4 \cdot 7^n + 3$ και $5 \cdot 7^n + 4$.

Το πλήθος των διαιρετών ενός φυσικού αριθμού a , του οποίου πρώτοι διαιρέτες είναι

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

με εκθέτες $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, αντίστοιχα, δηλαδή αν

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} \quad (1)$$

δίνεται από τον τύπο

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1). \quad (2)$$

Παράδειγμα. Ο αριθμός $a = 30870$ μπορεί να γραφεί ως $a = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3$ και έτσι το πλήθος των διαιρετών του είναι $(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (3+1) = 48$.

2.15. Βρείτε όλους τους διψήφιους αριθμούς που έχουν ακριβώς τρεις διαιρέτες.

Λύση. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2), συνάγουμε ότι $n=1$ και $\alpha_1=2$, δηλαδή οι αριθμοί είναι της μορφής p^2 , με p πρώτο αριθμό. Ο αριθμός αυτός θα είναι διψήφιος μόνον αν $p=5$ και $p=7$. Έτσι, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 25 και 49.

Ασκήσεις (3)

2.16. Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς που έχουν ακριβώς τέσσερις διαιρέτες, υπό την προϋπόθεση ότι το γινόμενο των διαιρετών τους είναι 225.

2.17. Βρείτε και τους τετραψήφιους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι έχουν ακριβώς πέντε διαιρέτες.

2.18. Βρείτε το φυσικό αριθμό που έχει ακριβώς έξι διαιρέτες και του οποίου το γινόμενο των διαιρετών του είναι α) 91125 β) 32768.

2.19. Βρείτε τους αριθμούς $\overline{ab}$, $72 < \overline{ab} \leq 85$, οι οποίοι έχουν ακριβώς τέσσερις διαιρέτες.

2.20. Βρείτε όλα τα πολλαπλάσια του 10 τα οποία έχουν ακριβώς έξι διαιρέτες.

2.21. Βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό ο οποίος έχει ακριβώς 42 διαιρέτες.

2.22. Δείξτε που δεν υπάρχουν τριψήφιοι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 35 και οι οποίοι έχουν ακριβώς 9 διαιρέτες.

2.23. Βρείτε τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό της μορφής $3^a \cdot 5^b$ οι οποίοι έχουν ακριβώς 12 διαιρέτες.

2.24. Βρείτε πρώτους αριθμούς x, y, z τέτοιους ώστε ο αριθμός $n = 11^x \cdot 19^y \cdot 31^z$ να έχει ακριβώς 144 διαιρέτες.

2.25. Βρείτε τον φυσικό αριθμό της μορφής $n = 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$ αν ο $27 \cdot n$ έχει 36 διαιρέτες περισσότερους από τον n , και ο $49 \cdot n$ έχει 12 διαιρέτες περισσότερους από τον n .

Είναι δυνατό να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $\gcd$ και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο lcm δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών χωρίς την παραγοντοποίηση αυτών των αριθμών, με τη χρήση του αποκαλούμενου *ευκλείδειου αλγορίθμου*.

Έστω $a, b \in \mathbf{N}$ δύο φυσικοί αριθμοί με $b \neq 0$ και $b \nmid a$. Διαιρούμε τον a δια του b και παίρνουμε πηλίκο q_1 και υπόλοιπο r_1 , δηλαδή

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Κατόπιν αντικαθιστούμε τον a με τον b και τον b με τον r_1 και εκτελούμε την ίδια εργασία

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$

$\vdots$

Όταν καταλήξουμε να έχουμε $r_{n+1} = 0$, τότε το αμέσως προηγούμενο υπόλοιπο, δηλαδή το r_n , είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a, b . Δηλαδή

$$\gcd(a, b) = r_n.$$

Παράδειγμα. Βρείτε τον $\gcd(93, 51)$.

Λύση. Έχουμε

$$93 = 51 \cdot 1 + 42$$

$$51 = 42 \cdot 1 + 9$$

$$42 = 9 \cdot 4 + 6$$

$$9 = 6 \cdot 1 + 3$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0$$

και επομένως $\gcd(93, 51) = 3$.

Σημείωση. Αυτό εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, με παραγοντοποίηση σε πρώτους, ότι $93 = 3 \cdot 31$ και $51 = 3 \cdot 17$, το οποίο δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

2.26. Βρείτε $a, b \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε $a + b = 1089$ και $\gcd(a, b) = 121$.

Λύση. Έχουμε $a = 121 \cdot m$, $b = 121 \cdot n$ και $\gcd(m, n) = 1$. Επειδή $a + b = 1089 (= 121 \cdot 9)$, παίρνουμε $m + n = 9$ που παράγει τα ακόλουθα ζεύγη σχετικά πρώτων

$$(m, n) \in \{(1, 8), (2, 7), (4, 5), (5, 4), (7, 2), (8, 1)\}.$$

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $(121, 986), (242, 847), (484, 605), (847, 242), (968, 121)$.

2.27. Βρείτε δύο διαφορετικούς αριθμούς $a, b > 1$ έτσι ώστε $\text{lcm}(a, b) = 667$.

Λύση. Αφού $667 = 23 \cdot 29$, οι δύο αριθμοί θα μπορούσαν να είναι οι

α) 23 και 29 β) 23 και 667 γ) 29 και 667.

Ασκήσεις (4)

2.28. Βρείτε $a, b \in \mathbf{N}$ όποιοι ικανοποιούν: $a \cdot b = 1600$ και $\text{lcm}(a, b) = 4 \cdot \gcd(a, b)$.

- 2.29.** Βρείτε $a, b \in \mathbf{N}$ με $a + b = 108$ και $\text{lcm}(a, b) = 315$.
- 2.30.** Βρείτε $a, b \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε $3 \cdot a = 7$ και $\text{lcm}(a, b) = 231$.
- 2.31.** Βρείτε $a, b \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε $\text{gcd}(a, b) = 4$ και $a^3 \cdot b^3 = 884736$.
- 2.32.** Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς a, b , $a < b$ έτσι ώστε $\text{lcm}(a, b) - \text{gcd}(a, b) = 34$.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με δύο πρακτικά προβλήματα τα οποία μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση μέγιστου κοινού διαιρέτη ή/και ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου.

3.33. Εάν τοποθετήσουμε τους μαθητές ενός σχολείου σε σειρές 2, 3, 4, 5 ή 6 μαθητών, τότε περισσεύει κάθε φορά ένας μαθητής, αλλά εάν τους τοποθετήσουμε σε σειρές των 7, τότε όλες οι σειρές είναι πλήρεις και δεν περισσεύει κανένας. Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που μπορεί να έχει το σχολείο.

Λύση. Αφού $\text{lcm}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$, πρέπει να βρούμε την ελάχιστη τιμή του k έτσι ώστε

$$7 \mid 60k + 1.$$

Η ζητούμενη τιμή είναι $k = 5$ και έτσι το σχολείο έχει 301 μαθητές.

2.34. Από έναν σταθμό λεωφορείων φεύγουν 4 λεωφορεία προς 4 διαφορετικές κατευθύνσεις κάθε 5 λεπτά, 8 λεπτά, 12 λεπτά και 18 λεπτά, αντίστοιχα, στην περίοδο από 6 π.μ. έως 9 μ.μ. Αν γνωρίζουμε ότι όλα τα λεωφορεία έχουν την πρώτη τους ταυτόχρονη αναχώρηση στις 7 π.μ., να βρεθούν οι άλλες στιγμές της ημέρας κατά τις οποίες τα 4 λεωφορεία έχουν ταυτόχρονες αναχωρήσεις.

Λύση. Δεδομένου ότι $\text{lcm}(5, 8, 12, 18) = 360$ και 360 λεπτά = 6 ώρες, έπεται ότι έχουμε ταυτόχρονες αναχωρήσεις στις 7:00, 13:00 και 19:00.

Ασκήσεις (5)

2.35. Εάν διαιρέσουμε τον a με 24, 36, 30 και 75 βρίσκουμε κάθε φορά υπόλοιπο 5. Να βρεθεί ο a αν $a < 10000$ και αν, επιπλέον, a πολλαπλάσιο του 11.

2.36. Εάν διαιρέσουμε έναν αριθμό n με 9, 12 και 15 παίρνουμε υπόλοιπα 6, 9 και 12, αντίστοιχα. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του n με 180.

2.37. Βρείτε τον μικρότερο και τον και μεγαλύτερο τριψήφιο αριθμό n που δίνει υπόλοιπο 7 κατά τη διαίρεση του με 9, 10 και 15.

2.38. Βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 7 και που δίνουν το ίδιο υπόλοιπο κατά τη διαίρεση τους με τους 2, 3, 5 και 6.

1.3. Πρώτοι αριθμοί

Υπάρχει μια ιδιαίτερα μεγάλη ποικιλία προβλημάτων σχετικών με πρώτους και σύνθετους αριθμούς. Στα ακόλουθα παραθέτουμε ένα δείγμα.

3.1. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p για τους οποίους ο $p + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση. Εάν $p + 1 = n^2$ έπεται ότι $p = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ που είναι σύνθετος αριθμός για οποιονδήποτε $n > 2$. Για $n = 2$ βρίσκουμε $p = 3$ όποιος είναι ο μόνος πρώτος αριθμός με την δοθείσα ιδιότητα.

3.2. Βρείτε δύο πρώτους αριθμούς a, b έτσι ώστε $a + b = 883$.

Λύση. Οποιοσδήποτε πρώτος αριθμός, εκτός από τον 2, είναι περιττός. Από το γεγονός ότι ο $a + b$ περιττός, πρέπει να ισχύει $a = 2$ ή $b = 2$ που σημαίνει ότι $b = 881$ ή $a = 881$, αντίστοιχα. Όμως ο τελευταίος είναι πρώτος αριθμός (ελέγξτε!).

3.3. Δείξτε ότι για κάθε μη μηδενικό $n \in \mathbf{N}$ οι $2n + 1$ και $n^2 + n$ είναι σχετικά πρώτοι.

Λύση. Θα κάνουμε χρήση του ακόλουθου λήμματος, το οποίο αφήνουμε ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 3.28).

Λήμμα 1. Δύο αριθμοί a και b είναι σχετικά πρώτοι εάν και μόνο εάν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί p, q , έτσι ώστε $pa + qb = 1$.

Τώρα, θέτοντας $a = 2n + 1, b = n^2 + n$ βρίσκουμε ότι οι $p = 2n + 1, q = -4$ ικανοποιούν

$$pa + qb = 1.$$

Επομένως οι $2n + 1$ και $n^2 + n$ είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί.

3.4. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς n για τους οποίους οι $n + 4$ και $n + 8$ είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση. Αν οι αριθμοί $n + 4$ και $n + 8$ είναι πρώτοι, τότε ο n είναι περιττός και $n > 1$ (σημειώστε ότι ο 1 δεν είναι πρώτος αριθμός).

Γράφουμε $n = 2k + 1$, όπου $k \in \mathbf{N}$. Οι τρεις πρώτοι αριθμοί στο πρόβλημα θα είναι οι $2k + 1, 2k + 5, 2k + 9$, όπου $k \neq 0$ (3)

Παρατηρήστε ότι για $k = 1$ λαμβάνουμε τη λύση 3, 7, 11. Θα δείξουμε ότι αυτή η περίπτωση είναι η μοναδική λύση στο πρόβλημα. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι για τις υπόλοιπες τιμές του k , τουλάχιστον ένας αριθμός στον κατάλογο (3) δεν είναι πρώτος. Θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι ο μικρότερος αριθμός στη λύση που βρήκαμε είναι ο 3. Είναι σαφές ότι οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός $k \in \mathbf{N}$ μπορεί να γραφεί σε μια από τις μορφές

$$3p, 3p + 1, 3p + 2 \quad (p \in \mathbf{N})$$

ανάλογα αν το υπόλοιπο του k κατά τη διαίρεσή του με 3 το είναι 0, 1 ή 2, αντίστοιχα.

Εάν $k = 3p + 1$, τότε $2k + 1 = 3(2p + 1)$ που δεν είναι πρώτος (εκτός στην περίπτωση $p = 0$, οπότε $k = 1$, η οποία δίνει την ήδη γνωστή μας λύση).

Εάν $k = 3p + 2$, τότε $2k + 5 = 3(2p + 3)$, που δεν είναι πρώτος.

Εάν $k = 3p$, τότε $2k + 9 = 3(2p + 3)$, που δεν είναι πρώτος.

Επομένως μόνο για $k = 1$, δηλαδή για $n = 3$, οι τρεις δεδομένοι αριθμοί είναι ταυτόχρονα πρώτοι.

Ασκήσεις (6)

3.5. Δείξτε ότι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός $n > 3$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα πρώτων. Βρείτε το εν λόγω άθροισμα στην περίπτωση του $n = 2004$.

3.6. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς οι οποίοι μπορούν να γραφούν και ως άθροισμα και ως διαφορά δύο πρώτων αριθμών.

3.7. Το άθροισμα τριών διαδοχικών πρώτων αριθμών είναι $n^2 + n$, όπου $n \in \mathbf{N}$. Βρείτε τους αριθμούς αν δύο από τους είναι διαδοχικοί αριθμοί.

3.8. Βρείτε τους πρώτους αριθμούς a, b, c οι οποίοι ικανοποιούν $a + b - c = 1530$ και $a - b = 966$.

3.9. Βρείτε τους πρώτους αριθμούς a, b, c οι οποίοι ικανοποιούν $a + b = 271$ και $a + b + c = 1994$.

3.10. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς a, b, c με $a + 10b + 12c = 82$.

3.11. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς a, b, c με $3a + 7b + 9c = 54$.

3.12. Βρείτε τους πρώτους αριθμούς a, b για τους οποίους οι $\overline{aba}$, $\overline{aab}$ και $\overline{baa}$ είναι πρώτοι των οποίων το άθροισμα ισούται με 555.

- 3.13.** Βρείτε τον πρώτο αριθμό p αν οι $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$ και $6p+1$ είναι και οι τρεις πρώτοι αριθμοί.
- 3.14.** Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς n για τους οποίους οι $n+2$, $n+6$, $n+8$ και $n+14$ είναι επίσης πρώτοι.
- 3.15.** Βρείτε τους θετικούς ακέραιους αριθμούς n για τους οποίους οι $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$ και $n+15$ είναι ταυτόχρονα πρώτοι.
- 3.16.** Βρείτε $p \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε οι αριθμοί p , p^2+2 , p^2+4 , p^2+20 να είναι όλοι πρώτοι.
- 3.17.** Βρείτε n , $p \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε οι n , $n+2^p$, $n+2^{p+1}$, $n+2^{p+2}$ να είναι ταυτόχρονα πρώτοι.
- 3.18.** Βρείτε n , $p \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε οι p , $p+2^n$, $p+2^{n+1}$, $p+2^{n+2}$, $p+2^{n+3}$ να είναι όλοι πρώτοι αριθμοί.
- 3.19.** Βρείτε n , $p \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε οι p , $p+3^n$, $p+3^{n+1}$, $p+3^{n+2}$, $p+3^{n+3}$ να είναι όλοι οι πρώτοι αριθμοί.
- 3.20.** Βρείτε πρώτο αριθμό p έτσι ώστε ο $24p+1$ να είναι τέλειο τετράγωνο.
- 3.21.** Βρείτε όλους τους πρώτους p έτσι ώστε ο $17p+1$ να είναι τέλειο τετράγωνο.
- 3.22.** Δείξτε ότι οι ακόλουθοι αριθμοί είναι σύνθετοι
12321, 1234321, 123454321, 12345654321.
- 3.23.** Δείξτε ότι ο $a = 2 \cdot 10^n + 61$, $n \neq 0$, είναι σύνθετος.
- 3.24.** Βρείτε τον πλήθος των ψηφίων του $a = 2^{2n+1} \cdot 25^n \cdot 5^3 - 1$. Είναι ο αριθμός αυτός πρώτος;
- 3.25.** Είναι ο $2^{2004} + 1$ πρώτος αριθμός;
- 3.26.** Δείξτε ότι ο $a = 2^{62} + 1$ γράφεται ως γινόμενο δύο σχετικά πρώτων αριθμών μεγαλύτερων του 1.
- 3.27.** Υπάρχει φυσικός αριθμός n έτσι ώστε ο $a = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ να είναι πρώτος αριθμός;
- 3.28.** Αποδείξτε το Λήμμα 1.

1.4. Παράσταση αριθμών ως προς διάφορες βάσεις

Όλοι οι αριθμοί εξετάσαμε στις προηγούμενες ενότητες ήσαν γραμμένοι στο δεκαδικό σύστημα της αρίθμησης. Υπάρχουν άλλες παραστάσεις, ως προς διαφορετικές βάσεις, οι οποίες είναι σημαντικές για διάφορους λόγους: παραδείγματος χάριν το δυαδικό σύστημα της αρίθμησης καθώς και η παράσταση ως προς βάση το 16, είναι σημαντικά στην Πληροφορική.

Το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιεί δύο ψηφία, τα 0 και 1. Οι παραστάσεις με βάση το 3 χρησιμοποιούν τα ψηφία 0, 1 και 2, και ούτω καθ' εξής.

Για να δηλώσουμε ότι ένας δεδομένος αριθμός N είναι γραμμένος ως προς βάση αρίθμησης έναν b , θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $N_{(b)}$. Ειδικά για την περίπτωση $b = 10$, παραλείψουμε τον δείκτη.

4.1. Δείξτε ότι $1_{(2)} + 11_{(3)} + 111_{(4)} + 1111_{(5)} + 11111_{(6)} = 3311_{(8)}$.

Λύση. Μετατρέπουμε όλους τους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα

$$1_{(2)} = 1; 11_{(3)} = 1 \cdot 3^1 + 1 = 4; 111_{(4)} = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 = 21;$$

$$1111_{(5)} = 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 1 = 156;$$

$$11111_{(6)} = 1 \cdot 6^4 + 1 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 1 = 1555;$$

$$3311_{(8)} = 3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 = 1737,$$

και ελέγχουμε την ισότητα. Πράγματι, έχουμε $1 + 4 + 21 + 156 + 1555 = 1737$.

4.2. Βρείτε το ψηφίο x εάν $\overline{x(x+1)}_{(7)} = \overline{(x+1)x}_{(4)}$.

Λύση. Πρέπει να έχουμε $x+1 \leq 3$ και $x \geq 1$. Από την $\overline{x(x+1)}_{(7)} = 7x + x + 1 = 8x + 1$ και την $\overline{(x+1)x} = 4(x+1) + x$, παίρνουμε $x = 1$.

Ασκήσεις (7)

4.3. Βρείτε τα x και y αν $\overline{12}_{(x)} + \overline{36}_{(y)} = 34$.

4.4. Βρείτε τα x και y αν $\overline{13}_{(x)} + \overline{31}_{(y)} = 23$.

4.5. Πόσα ψηφία έχει στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης ο αριθμός p εάν $1 + p = 2^{2004}$ (στο δεκαδικό σύστημα);

4.6. Χωρίς να μετατρέψετε τους αριθμούς 1234 και 567 στο δυαδικό σύστημα, βρείτε πόσα ψηφία θα έχουν αν παρασταθούν σε αυτή την βάση.

4.7. Βρείτε ποιοι από τους αριθμούς $a = \overline{123}_{(4)}$, $b = \overline{325}_{(6)}$ και $c = \overline{117}_{(8)}$ είναι τέλειοι κύβοι.

1.5. Διάφορα

5.1. Δείξτε ότι ο αριθμός $\underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ ψηφία}} \underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ ψηφία}}$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο διαδοχικών

θετικών ακεραίων αριθμών.

5.2. Βρείτε τους τριψήφιους αριθμούς $\overline{abc}$ έτσι ώστε $\overline{abc} = 8abc$.

5.3. Δείξτε ότι $\overline{abab} \cdot \overline{cd} = \overline{cdcd} \cdot \overline{ab}$.

5.4. Δείξτε ότι για οποιουδήποτε $n \in \mathbf{N}$, οι αριθμοί $a = 2^n \cdot 5^{n+1} + 1$ και $b = 2^{n+1} \cdot 5^n + 1$ δεν είναι τέλεια τετράγωνα.

5.5. Είναι ο αριθμός $n = 2^{2007} + 1$ πρώτος;

5.6. Δείξτε ότι για οποιουδήποτε μη μηδενικό $n \in \mathbf{N}$, ο αριθμός $7^n - 4$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

5.7. Δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων επτά διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 7.

5.8. Βρείτε a, b, c, d έτσι ώστε $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2002$.

5.9. Βρείτε a, b, c, d έτσι ώστε $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2222$.

5.10. Βρείτε διαφορετικά από το μηδέν ψηφία a και b έτσι ώστε

$$\overline{aa} \times \overline{a0a} = \overline{bbbb}.$$

5.11. Βρείτε ψηφία a, b, c για τα οποία ισχύει

$$\overline{ac} \times \overline{b1} = \overline{1abc}.$$

5.12. Βρείτε ψηφία a, b, c, d για τα οποία ισχύει

$$\overline{abcd} = \overline{cd} \times \overline{bcd}.$$

5.13. Βρείτε ψηφία a, b, c και ένας αριθμός n έτσι ώστε

$$\overline{abc} \times \overline{abc} = \overline{nba}.$$

1.6. Λύσεις, υποδείξεις, απαντήσεις

1.6.1. Ασκήσεις (1)

1.8. $ld(1983^{1986}) = ld(3^{1986}) = 9$, διότι το 1986 αφήνει υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθεί δια 4. Επίσης $ld(1984^{1986}) = ld(4^{1986}) = 6$ και $ld(1985^{1986}) = 5$. Έτσι $ld(N) = 0$ και επομένως το N είναι πολλαπλάσιο του 10.

1.9. $a = 5^{2n+3} \cdot 3^{2(n+2)} + 3^{2n+1} \cdot 5^{2(n+1)} = 5^{2n+2} \cdot 3^{2n+1}(5 \cdot 3^3 + 1) = 136 \cdot 5^{2n+2} \cdot 3^{2n+1}$. Επειδή $136 = 8 \cdot 17$, έχουμε ότι $17 \mid a$.

1.10. $a = (7 \cdot 9)^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - (3 \cdot 7)^n \cdot 3^{n+2} = 7^n \cdot 3^{2n} + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 3^{2n+2} \cdot 7^n =$
 $= 7^n \cdot 3^{2n}(1 + 7 \cdot 3 - 3^2) = 13 \cdot 7^n \cdot 3^{2n}$ που είναι πολλαπλάσιο του 13.

1.11. Έστω $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ δεδομένος αριθμός. Έχουμε

$$\begin{aligned} N &= a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1 = \\ &= a_n(9+1)^{n-1} + a_{n-1}(9+1)^{n-2} + \dots + a_2 \cdot (9+1) + a_1 = \\ &= 9m + a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1. \end{aligned}$$

Επομένως $3 \mid N$, (αντίστοιχα $9 \mid N$) εάν και μόνο εάν το άθροισμα των ψηφίων του N είναι πολλαπλάσιο του 3, αντίστοιχα του 9.

1.6.2. Ασκήσεις (2)

2.1. α) $x \in \{0, 5\}$ β) $x \in \{0, 6\}$ γ) $x = 6$.

2.2. Επειδή $15 = 3 \cdot 5$ και $\gcd(3, 5) = 1$, έχουμε $15 \mid \overline{2x3y}$ εάν και μόνο εάν είναι διαιρετό από 3 και από 5. Συμπεραίνουμε ότι $y = 0$ και $x \in \{1, 4, 7\}$ ή $y = 5$ και $x \in \{2, 5, 8\}$.

2.3. $(x, y) \in \{(0, 4), (2, 2), (4, 0), (5, 8), (7, 6), (9, 4)\}$.

2.4. $(x, y) \in \{(5, 0), (0, 5), (9, 5)\}$.

2.5. Επειδή $156 = 4 \cdot 39$ και $\gcd(4, 39) = 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $4 \mid N$ και $39 \mid N$. Πράγματι, αυτό έπεται από τα

$$N = (3 + 3^2 + 3^3) + 3^3(3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{1983}(3 + 3^2 + 3^3) = 39 \cdot A,$$

και

$$N = (3 + 3^2) + 3^2(3 + 3^2) + \dots + 3^{1984}(3 + 3^2) = 12 \cdot B.$$

2.6. Ομοίως με την 1.7.

2.7. Ομοίως με την 1.7.

2.8. $a = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$.

Από τις 1.2 και 1.3 έχουμε ότι $6 \mid (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$. Αφού $30 = 6 \cdot 5$ και $\gcd(5, 6) = 1$ πρέπει να αποδείξουμε ότι $5 \mid a$. Οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός n έχει μια από τις ακόλουθες μορφές:

$$\{5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Εάν $n \in \{5k, 5k + 1, 5k + 4\}$, έπεται προφανώς ότι $5 \mid a$.

Εάν $n = 5k + 2$, έπεται ότι $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5m$, ενώ εάν $n = 5k + 3$, έπεται $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 5m$.

2.9. Ομοίως με την 1.7.

2.10. Έπεται από την $2 \cdot (3a + 5b) + 7 \cdot (4a + b) = 17(2a + b)$. Το αντίστροφο είναι προφανές.

2.11. - 2.13. Ομοίως με την 2,10.

2.14. α) Έστω $d = \gcd(6n + 5, 7n + 6)$, δηλαδή $d \mid 6n + 5$ και $d \mid 7n + 6$. Έχουμε τότε $d \mid 6 \cdot (7n + 6) - 7 \cdot (6n + 5) = 1$, δηλαδή $d = 1$.

1.6.3. Ασκήσεις (3)

2.16. Η μόνη δυνατότητα είναι $n = d_1^1 \cdot d_2^1$ ($d_1 < d_2$) ή $n = d^3$, όπου d_1, d_2, d είναι πρώτοι αριθμοί. Στη δεύτερη περίπτωση οι διαιρέτες είναι d, d^2, d^3 αλλά η $d^6 = 225$ δεν έχει ακραία ρίζα. Μένει η περίπτωση $n = d_1 d_2$. Από την $d_1 \cdot d_2 \cdot d_1 d_2 = 225$ συμπεραίνουμε ότι $d_1 = 3$ και $d_2 = 5$.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $n = 15$.

2.17. Ο αριθμός πρέπει να είναι της μορφής $n = d^4$, d πρώτος. Επομένως ο n είναι τετραψήφιος αριθμός μόνο όταν $d = 7$, οπότε $n = 7^4 = 2401$.

2.18. α) $n = 45$, β) $n = 32$.

2.19. $\overline{ab} = p^3$, όπου p πρώτος, ή $\overline{ab} = m \cdot n$, όπου m και n πρώτοι. Βρίσκουμε $\overline{ab} \in \{74, 77, 82, 85\}$.

2.20. Αφού $10 = 2 \cdot 5$ και $6 = 2 \cdot 3$, συμπεραίνουμε ότι $n = 2^a \cdot 5^b$ με $(a + 1)(b + 1) = 6$. Εάν $a = 1$ τότε $b = 2$ και $n = 20$, ενώ εάν $a = 2$ τότε $b = 1$ και $n = 20$.

2.21. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ και ως εκ τούτου $n = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ με $(m + 1)(n + 1)(p + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Ο μικρότερος αριθμός λαμβάνεται για $m = 1, n = 2, p = 6, a = 5, b = 3, c = 2$, δηλαδή είναι ο $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2880$.

2.22. Έστω $\overline{abc} = 7^n \cdot 5^m \dots$. Το πλήθος των διαιρετών του είναι $(n + 1)(m + 1) \dots = 3 \cdot 3 \Rightarrow n + 1 = 3$ και $m + 1 = 3$. Κατά συνέπεια, ο μικρότερος αριθμός θα είναι ο $7^2 \cdot 5^2 = 1225$, ο οποίος είναι τετραψήφιος.

2.23. Ο μικρότερος αριθμός είναι ο 675 και ο μεγαλύτερος ο 5^{11} (εάν δεχθούμε ότι οι a και b θα μπορούσαν να είναι μηδέν).

2.24. Έχουμε $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 144$. Δεδομένου ότι οι x, y, z είναι πρώτοι, χρησιμοποιούμε την παραγοντοποίηση $144 = 4 \cdot 6 \cdot 6$ που δίνει τις λύσεις (3,5,5), (5,3,5), (5,5,3).

2.25. $n = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^5$ ή $n = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$.

1.6.4. Ασκήσεις (4)

2.28. $\gcd(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b) = a \cdot b \Rightarrow 4 \cdot [\gcd(a,b)]^2 = 1600 \Rightarrow \gcd(a,b) = 20$. Έτσι οι λύσεις είναι $a = 20, b = 80$ ή $a = 80, b = 20$.

2.29. 3 και 105.

2.30. $a = 77, b = 33$.

2.31. $(a,b) \in \{(4,24), (8,12), (12,8), (24,4)\}$.

2.32. Αφού $\gcd(a,b) \mid a$ και $a \mid \text{lcm}(a,b)$ έπεται ότι $\gcd(a,b) \mid \text{lcm}(a,b)$ και άρα $\gcd(a,b) \mid \text{lcm}(a,b) - \gcd(a,b)$, δηλαδή $\gcd(a,b) \mid 34$. Θέτουμε $d = \gcd(a,b)$. Τότε $d \in \{1,2,17,34\}$ και οι λύσεις είναι

$$(a,b) \in \{(1,35), (5,7), (2,36), (4,18), (17,51), (34,68)\}.$$

1.6.5. Ασκήσεις (5)

2.35. $\text{lcm}(24, 36, 30, 75) = 1800$, so $x = 1800k + 5$ and $x \div 11$. Βρίσκουμε $x = 7205$.

2.36. $\text{lcm}(9,12,15) = 180$, $n = 9 \cdot c_1 + 6$; $n = 12 c_2 + 9$ και $n = 15c_3 + 12$. Έτσι $9 \mid n + 3$, $12 \mid n+3$ και $15 \mid n+3$. Επομένως $180 \mid n+3$, δηλαδή $n + 3 = 180k$, $k \in \mathbf{N}^*$. Έτσι $n = 180k - 3 = 180(k-1) + 177$. Το υπόλοιπο είναι 177.

2.37. $\text{lcm}(9,10,15) = 90 \Rightarrow n = 90k + 7$, $n \in \{187, 997\}$.

2.38. Το υπόλοιπο μπορεί να είναι 0 ή 1. Εάν $r = 0 \Rightarrow n = \text{lcm}(2,3,4,5,6,7) \cdot k$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow n \in \{210, 420, 630, 840\}$. Εάν $r = 1 \Rightarrow \text{lcm}(2,3,4,5,6) = 30$ και ο μικρότερος αριθμός είναι $30 \cdot 10 + 1 = 301$. Οι λύσεις είναι $301 + 210 \cdot k$, $k \in \mathbf{N}$, δηλαδή $n \in \{301, 511, 721, 931\}$.

1.6.6. Ασκήσεις (6)

3.5. Εάν $n = 2k$, έπεται ότι $n = \underbrace{2+2+\dots+2}_{k \text{ φορές}}$, ενώ για $n = 2k + 1$ έχουμε $n = \underbrace{2+2+\dots+2+3}_{k-1 \text{ φορές}} + 3$.

3.6. Έστω p πρώτος αριθμός, $p > 2$, οπότε p περιττός. Εάν $q_1 + r_1 = p$ και $q_2 - r_2 = p$, ένας από q_1, r_1 και ένας από q_2, r_2 πρέπει να είναι άρτιος, οπότε $p = q_1 + 2 = q_2 - 2$ με q_1 και q_2 πρώτοι αριθμοί. Επομένως οι $p-2, p$ και $p+2$ είναι και οι τρεις πρώτοι αριθμοί, επομένως η $p = 5$ είναι η μοναδική λύση (αποδείξτε το!).

3.7. $n^2 + n = n(n+1)$ που είναι πολλαπλάσιο του 2, οπότε ένας από τους τρεις πρώτους αριθμούς είναι άρτιος, δηλαδή ίσος με 2, και άλλοι είναι περιττοί και επομένως μη διαδοχικοί αριθμοί. Για να έχουμε δύο διαδοχικούς πρώτους αριθμούς, πρέπει να έχουμε τον 3 αναμεταξύ τους, και έτσι ο τρίτος αριθμός είναι $n^2 + n - 5$, ο οποίος είναι πρώτος αριθμός για $n = 3$. Οι αριθμοί είναι οι 2, 3 και 7.

3.8. $a = 1249, b = 283, c = 2$.

3.9. $a = 2, b = 269, c = 1723; a = 269, b = 2, c = 1723$.

3.10. $a = 2, b = 2, c = 5$.

3.11. 233 και 532.

3.12. $a = 1, b = 3$.

3.13. $p = 5$.

3.14. $n = 5$.

3.15. $n = 4$.

3.16. Για $p = 3$ παίρνουμε τη λύση 3, 11, 13, 29. Αποδεικνύουμε ότι είναι η μοναδική. Οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός p έχει μια από τις μορφές

$$3k, 3k + 1, 3k + 2, k \in \mathbf{N}.$$

Εάν $p = 3k$ και $k > 1$, το p είναι σύνθετος (για $p = 1$ βρίσκουμε την παραπάνω λύση).

Εάν $p = 3k + 1$, έπεται ότι $p^2 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$, ένας σύνθετος αριθμός $\forall k \in \mathbf{N}$.

Εάν $p = 3k + 2$, έπεται ότι $p^2 + 20 = 3(3k^2 + 4k + 8)$, ένας σύνθετος αριθμός $\forall k \in \mathbf{N}$.

3.17. Ο πρώτος αριθμός n πρέπει να είναι περιττός. Δεδομένου ότι μεταξύ των $2^p, 2^{p+1}, 2^{p+2}$ βρίσκουμε πάντα αριθμό της μορφής $3m + 1$ και επίσης της μορφής $3m + 2$ (αποδείξτε το!), έχουμε πρώτους αριθμούς στη δεδομένη μορφή εάν και μόνο εάν $n = 3k$ (και $k = 1$) (διαφορετικά τουλάχιστον ένας αριθμός είναι υποχρεωτικά σύνθετος). Επομένως $n = 3$ και η ακολουθία είναι

$$3, 3 + 2^p, 3 + 2^{\{p+1\}}, 3 + 2^{\{p+2\}}.$$

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις

$$p \in \{3m, 3m + 1, 3m + 2 \mid m \in \mathbf{N}\}.$$

1) Για $p = 3m$, έχουμε

$$2^p = (2^3)^m = (7 + 1)^m = 7m_1 + 1$$

$$2^{p+1} = 2^p \cdot 2 = (7m_1 + 1) \cdot 2 = 7m_2 + 2$$

$$2^{p+2} = 7m_3 + 4$$

και επομένως ο αριθμός $3 + 2^{p+2}$ είναι σύνθετος ως πολλαπλάσιο του 7, για $m \geq 1$ (στην περίπτωση $m = 0$, $3 + 2^p = 4$ είναι σύνθετος).

2) Γιατί $p = 3m + 1$ έχουμε $3 + 2^{p+1} = 3 + 2^{3m+2} = 3 + 2^{p+1} = 3 + 2^{3m+2} = 7m'$, το οποίο είναι σύνθετο, για $m \geq 1$. Για $m = 0$, βρίσκουμε την ακολουθία πρώτων αριθμών 3, 5, 7 και 11

3) Για $p = 3m + 2$ έχουμε $3 + 2^p = 7m'$, δηλαδή σύνθετος αριθμός, για όλα τα $m \geq 1$. Για $m = 0$, δηλαδή $p = 2$, παίρνουμε την ακολουθία πρώτων αριθμών $\{3, 7, 11, 19\}$.

Επομένως η λύση στο πρόβλημά μας είναι $(n, p) \in \{(3, 1), (3, 2)\}$.

3.18. Ομοίως με την 2.53, βρίσκουμε $p = 3$ και άρα $n = 1$.

3.19. Αφού οι $3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2}, 3^{n+3}$ είναι περιττοί, το p πρέπει να είναι άρτιος, δηλαδή $p = 2$. Τα τελευταία ψηφία των διαδοχικών δυνάμεων $3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2}, 3^{n+3}$ (όπου $n \neq 0$) θα είναι 3, 9, 7, 1, σε κάποια διάταξη. Έτσι, κάποια δύναμη θα έχει το 3 ως το τελευταίο ψηφίο και έτσι $2 +$ αυτή τη δύναμη θα έχει το 5 ως στο τελευταίο ψηφίο,

δηλαδή θα είναι πολλαπλάσιο του 5. Έτσι, έχουμε $n = 0$ ή $n = 1$, με λύσεις τις 2, 3, 5, 11, 29 και 2, 5, 11, 29, 83, αντίστοιχα.

$$3.20. \quad 24p + 1 = k^2 \Rightarrow p = \frac{k^2 - 1}{24}, \quad k = 2l + 1, \quad l \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad p = \frac{l(l+1)}{6}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Βρίσκουμε $p \in \{2, 5, 7\}$.

$$3.21. \quad 17p + 1 = k^2 \Rightarrow 17p = (k-1)(k+1) \text{ κ.λπ. Απάντηση : } p = 19.$$

$$3.22. \quad 12321 = 111^2, \quad 1234321 = 1111^2, \dots$$

3.23. $a = \underbrace{200\dots0}_{n-2 \text{ φορές}}61$ και έτσι το άθροισμα των ψηφίων του είναι 9, οπότε είναι πολλαπλάσιο του 9.

$$3.24. \quad a = 2^{2n+1} \cdot 5^3 - 1 = (2 \cdot 5)^{2n+1} \cdot 5^2 - 1 = 25 \underbrace{000\dots0}_{2n+1 \text{ φορές}} = 24 \underbrace{99\dots9}_{2n+1 \text{ φορές}} \Rightarrow \text{έχει } 2n+3 \text{ ψηφία.}$$

Δεδομένου ότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι $2 + 4 + 9(2n+1)$, που είναι πολλαπλάσιο του 3, το a επίσης είναι πολλαπλάσιο του 3.

$$3.25. \quad \text{Παρατηρήστε ότι } 2004 = 3 \cdot 668 \text{ και άρα}$$

$$2^{2004} + 1 = (2^{668})^3 + 1 = (2^{668} + 1)(2^{2 \cdot 668} - 2^{668} + 1).$$

Έτσι, ο αριθμός είναι σύνθετος.

$$3.26. \quad a = 2^{62} + 1 = 4^{31} + 1 = (4 + 1)(4^{30} - 4^{29} + \dots - 4 + 1) = 5k, \text{ όπου}$$

$$k = 4^{30} - 4^{29} + 4^{28} - \dots + 4^2 - 4 + 1 = (5-1)^{30} - (5-1)^{29} + \dots + (5-1)^2 - (5-1) + 1 = 5m + \underbrace{1+1+\dots+1}_{31 \text{ φορές}} = 5m' + 1 \text{ που είναι σχετικά πρώτος προς τον 5.}$$

$$3.27. \quad a = n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 1) = (n+1)^2 \cdot (n^2 + 1) \text{ όποιος}$$

είναι σύνθετος αριθμός, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.6.7. Ασκήσεις (7)

$$4.3. \quad x = 5, y = 7.$$

$$4.4. \quad x = 7, y = 4 \text{ ή } x = 4, y = 5.$$

$$4.5. \quad p = 2^{2004} - 1 = 2^{2003} + 2^{2002} + \dots + 2 + 1 = \underbrace{11\dots1}_{2004 \text{ φορές}}_{(2)}, \text{ έτσι ο } p \text{ έχει 2004 ψηφία στο}$$

δυαδικό σύστημα.

$$4.6. \quad 2^{10} < 1234 < 2^{11}; \quad 2^9 < 567 < 2^{10}. \text{ Έτσι, ο } 1234 \text{ έχει 11 ψηφία και ο } 567 \text{ έχει 10}$$

ψηφία στο δυαδικό σύστημα.

$$4.7. \quad a = 27 = 3^3, \quad b = 125 = 5^3.$$

1.6.8. Διάφορα

$$5.1. a = (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) + 4 \cdot 10^n (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) = \\ = 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 4 \cdot 10^n \cdot \frac{10^n - 1}{9} = 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} (1 + 2 \cdot 10^n) = \frac{2 \cdot 10^n - 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}.$$

Οι αριθμοί $2 \cdot 10^n - 2$ και $2 \cdot 10^n + 1$ είναι πολλαπλάσια του 3 διότι

$$2 \cdot 10^n - 2 = 2 \cdot 10^n + 1 - 3 = \underbrace{200 \dots 01}_{n-1 \text{ φορές}} - 3$$

και

$$2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{2000 \dots 0}_{n-1 \text{ φορές}}.$$

Επιπλέον $\frac{2 \cdot 10^n - 2}{3} + 1 = \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}.$

$$5.2. \overline{abc} = 8abc \Leftrightarrow \overline{bc} = 4a(2bc - 25). \text{ Λύσεις: } 128, 672.$$

$$5.3. \overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101.$$

5.4. $a = \underbrace{500 \dots 01}_{n-1 \text{ φορές}}$ και $b = \underbrace{200 \dots 01}_{n-1 \text{ φορές}}$. Οι a και b είναι πολλαπλάσια του 3, αλλά του 9, οπότε οι αριθμοί αυτοί δεν είναι τέλεια τετράγωνα.

5.5. Αφού $2007 = 9 \cdot 223$, ο n είναι σύνθετος αριθμός.

5.6. Οποιοδήποτε τετράγωνο έχει μια από τις ακόλουθες μορφές: $8k, 8k+1, 8k+4$ (αποδείξτε το!). Κατόπιν δείξτε ότι ο $7^n - 4$ είναι της μορφής $8k+5$ (εάν το n είναι άρτιος) ή της μορφής $8k+3$ (εάν το n είναι περιττός).

$$5.7. (7k)^2 + (7k+1)^2 + (7k+2)^2 + (7k+3)^2 + (7k+4)^2 + (7k+5)^2 + (7k+6)^2 = \\ = 7m + 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 7m + \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 7m'.$$

$$5.8. 1803.$$

$$5.9. 1573.$$

$$5.10. a=2, b=4; a=3, b=9; a=b=1.$$

$$5.11.$$

$$\overline{ac} \times \overline{b1} = \overline{1abc} \Leftrightarrow c-1 = \frac{100+9a}{b} - 10a \quad (4)$$

Το οποίο δείχνει ότι

$$\frac{100+9a}{b} \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Δεν μπορεί να έχουμε $c=1$ δεδομένου ότι η (4) θα οδηγούσε στην

$$100 = a(10b-9)$$

και έτσι $a=4$ (επειδή $10b-9$ είναι περιττός) και άρα $10b-9=5$ που είναι αδύνατο. Επομένως $c-1 \geq 1$ και από την (4) παίρνουμε

$$1 \leq \frac{100+9a}{b} - 10a \leq 8. \quad (6)$$

Εάν έχουμε $b \in \{7, 8\}$ προκύπτει από (6) ότι $a = 1$, για το οποίο δεν ισχύει η (4). Για $b = 5$, η (4) δίνει ότι $a \in \{4, 8\}$, τιμές που δεν ικανοποιούν την (6). Επομένως, καταλήγουμε στην $b = 2$.

Από την (5) συμπεραίνουμε ότι το a είναι άρτιος και, και από την (6), ότι $11a \geq 84$, δηλαδή $a \geq 8$. Κατά συνέπεια $a = 8$ και άρα από την (4) παίρνουμε τελικά $c = 7$. Έτσι, $a = 8$, $b = 2$ και $c = 7$ είναι η μοναδική λύση.

5.12. Ομοίως με την 2.81 βρίσκουμε $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 5$.

5.13. Μοναδική λύση: $a = 9$, $b = 6$, $c = 3$ και $963 \times 963 = 927369$.

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ

Petar Kenderov και Ivaylo Kortezov

§1. Εισαγωγή

Εξετάζουμε μερικά προβλήματα πριν εξηγήσουμε τι ακριβώς είναι οι "αναλλοιώτες".

Πρόβλημα A1.

Ο γενναίος ιππότης συνάντησε τον τρικέφαλο δράκο και αποφάσισε να επιδείξει πόσο γενναίος ήταν με την κοπή όλων των κεφαλιών του δράκου. Στην πραγματικότητα απέδειξε την ανικανότητά του: τύχαινε ότι μετά από την κοπή ενός κεφαλιού, φύτρωναν τρία νέα κεφάλια στη θέση του κομμένου. Εντούτοις ο ιππότης επέμεινε να κόβει κεφάλια. Όταν κουράστηκε, αποφάσισε να μετρήσει τα κεφάλια του πολυκέφαλου πια δράκου. Μέτρησε 2006. Μέτρησε σωστά;

Λύση.

Μετά από το πρώτο κτύπημα θα κοπεί ένα το κεφάλι και τρία νέα κεφάλια θα εμφανιστούν. Ο δράκος θα έχει δύο περισσότερα κεφάλια, συνολικά πέντε. Μετά από το δεύτερο κτύπημα ο δράκος θα έχει επτά κεφάλια. Μετά από το τρίτο κτύπημα 9, και τα λοιπά. Μετά από κάθε κτύπημα, το πλήθος των κεφαλιών αυξάνει κατά δύο. Αν και το πλήθος των κεφαλιών του δράκου αυξάνει, μετά από κάθε κτύπημα είναι πάντα ένας περιττός αριθμός: 3, 5, 7, 9, 11, ... Επομένως το πλήθος των κεφαλιών δεν μπορεί να είναι ο άρτιος αριθμός 2006. Ο ιππότης παρουσίασε διαφορετικό τύπο ανικανότητας. Δεν ήταν καλός στο μέτρημα.

Πρόβλημα A2.

Οι ακέραιοι αριθμοί από τον 1 έως 99 γράφονται σε μια σειρά. Η Μαρία διαγράφει δύο από αυτούς τους αριθμούς στην τύχη και γράφει τη διαφορά τους στο τέλος της σειράς. Κατόπιν επαναλαμβάνει αυτήν την διαδικασία με το νέο κατάλογο αριθμών έως ότου καταλήξει με έναν μόνο αριθμό. Είναι ο τελευταίος αυτός αριθμός άρτιος ή περιττός;

Λύση.

Έστω S το πλήθος των αριθμών στη σειρά. Στην αρχή $S = 50$. Υποθέστε ότι η Μαρία διαγράφει τους αριθμούς α και β . Υπάρχουν τρεις πιθανές περιπτώσεις:

α) Και οι δύο αριθμοί να είναι άρτιοι (σε αυτήν την περίπτωση η ενέργεια της Μαρίας δεν έχει επιπτώσεις στο πλήθος των περιττών αριθμών στη σειρά επειδή η διαφορά μεταξύ των α και β είναι πάλι άρτιος αριθμός),

β) οι α και το β είναι και οι δύο περιττοί αριθμοί (η διαφορά τους τότε είναι άρτιος αριθμός και το πλήθος των περιττών αριθμών στη σειρά μειώνεται κατά 2),

γ) ο ένας από τους α και β είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Σε αυτήν την περίπτωση ένας περιττός αριθμός διαγράφεται και ένας περιττός αριθμός προστίθεται επειδή η διαφορά μεταξύ του a και του b είναι περιττός.

Επομένως, κάθε ενέργεια της Μαρίας είτε αφήνει αναλλοίωτο το S ή το μειώνει κατά. Έτσι ο S παραμένει πάντα άρτιος. Δεδομένου ότι στο τέλος πρέπει να έχουμε το $S \leq 1$, η μόνη δυνατότητα είναι $S = 0$. Έτσι ο τελευταίος αριθμός είναι άρτιος.

Πρόβλημα A3 (του Ivan Simeonov).

Σε ένα χαρτί γράφονται δύο αριθμοί, οι (19, 94). Η Άννα, η Ελένη και η Καίτη μπορούν να αλλάξουν τους αριθμούς στο χαρτί σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

Η Άννα αντικαθιστά τους αριθμούς (a, b) με τους $(a-b, b)$.
 Η Ελένη αντικαθιστά τους αριθμούς (a, b) με τους $(a+b, b)$.
 Η Cathy αντικαθιστά τους αριθμούς (a, b) με τους (b, a) .

Κάθε φορά που παίρνει το χαρτί μία από τις κοπελιές, κάνει τις αλλαγές της τουλάχιστον μία φορά (και όσες ακόμα επιθυμεί) πριν δώσει το χαρτί σε μια δεύτερη κοπελιά για να εκτελέσει τις δικές τις αντικαταστάσεις (μία ή περισσότερες φορές). Είναι δυνατό να καταλήξουν να είναι γραμμένοι στο χαρτί οι αριθμοί:

α) $(19;95)$;

β) $(19;96)$;

Λύση.

Κάθε μια από τις τρεις διαδικασίες συντηρεί το μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ) των δύο αριθμών (a, b) . Αφού $\text{ΜΚΔ}(19, 94) = 1$ και $\text{ΜΚΔ}(19, 95) = 19$, δεν είναι δυνατόν να καταλήξουμε στους αριθμούς $(19, 95)$. Στην άλλη περίπτωση έχουμε $\text{ΜΚΔ}(19, 96)=1$. Στην πραγματικότητα, το ζευγάρι $(19, 96)$ μπορεί να ληφθεί από την ακολουθία αλλαγών: Αν το Κ αντιπροσωπεύει την Καίτη, το Α την Άννα και το Ε την Ελένη, οι ακόλουθες αλλαγές οδηγούν στο ζητούμενο αποτέλεσμα:

Κ: $(94, 19)$

ΑΑΑΑ: $(18, 19)$

Κ: $(19, 18)$

Α: $(1, 18)$

Κ: $(18, 1)$

Ε: $(19, 1)$

Κ: $(1, 19)$

ΕΕΕΕΕ: $(96, 19)$

Κ: $(19, 96)$.

Ας επανέλθουμε τώρα στο θέμα μας. Τι είναι μια αναλλοίωτη;

Στο Πρόβλημα Α1 είδαμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πλήθους των κεφαλιών του δράκου δια 2 (το ισοϋπόλοιπο), δεν άλλαξε. Το πλήθος παρέμεινε περιττός αριθμός όλη την ώρα. Το ισοϋπόλοιπο ήταν αναλλοίωτο (αμετάβλητο) μετά από κάθε «ενέργεια» του ιππότη. Στο δεύτερο πρόβλημα πάλι το ισοϋπόλοιπο του πλήθους περιττών αριθμών στη σειρά παρέμεινε αναλλοίωτο. Ήταν το ίδιο μετά από κάθε ενέργεια της Μαρίας. Σε περιπτώσεις όπως αυτές λέμε ότι "το ισοϋπόλοιπο έμεινε αναλλοίωτο". Στο τρίτο πρόβλημα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) παρέμεινε ο ίδιος, δηλαδή ήταν μία αναλλοίωτη. Γνωρίζοντας ότι μία ποσότητα παραμένει αναλλοίωτη μας έδωσε την δυνατότητα να επιλύσουμε τα παραπάνω προβλήματα.

Ακολουθούν και άλλα παραδείγματα παρόμοιας φύσης.

Πρόβλημα Α4.

Ένα κιβώτιο έχει 36 μπουκάλια, από τα οποία 19 τους είναι γεμάτα και τα υπόλοιπα κενά. Παίρνουμε δύο μπουκάλια στη τύχη. Εάν ακριβώς ένα από αυτά είναι γεμάτο, το επιστρέφουμε στο κιβώτιο. Εάν και τα δύο είναι κενά, επιστρέφουμε το ένα από τα δύο πίσω στο κιβώτιο. Εάν και τα δύο είναι πλήρη, αδειάζουμε το ένα από τα δύο και το επιστρέφουμε στο κιβώτιο. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία έως ότου παραμείνει ένα μόνο μπουκάλι στο κιβώτιο. Είναι το τελευταίο αυτό μπουκάλι γεμάτο ή είναι άδειο;

Λύση.

Έστω το S το πλήθος των γεμάτων μπουκαλιών. Στην αρχή $S = 19$. Κάθε επανάληψη της διαδικασίας είτε συντηρεί το S ή το μειώνει κατά 2. Κατά συνέπεια το

ισοϋπόλοιπο του S παραμένει αναλλοίωτο. Δεδομένου ότι στο τέλος έχουμε $S \leq 1$, παίρνουμε $S = 1$. Έτσι το τελευταίο μπουκάλι είναι γεμάτο.

Πρόβλημα A5.

Σε ένα πολύγωνο είναι σχεδιασμένες μερικές από τις διαγωνίες του. Καλούμε μία κορυφή του *περιττή* αν το πλήθος διαγωνίων που διέρχονται από την κορυφή αυτή είναι περιττός αριθμός. Αλλιώς την καλούμε *άρτια*. Δείξτε ότι το πλήθος των περιττών κορυφών είναι άρτιος αριθμός (υπενθυμίζουμε ότι το 0 θεωρείται άρτιος αριθμός).

Λύση.

Αρχικά υποθέτουμε ότι δεν έχει σχεδιαστεί καμία διαγώνιος. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει άρτιος αριθμός (συγκεκριμένα 0) περιττών κορυφών. Κατόπιν αρχίζουμε και σχεδιάζουμε μία μία τις διαγωνίες του. Κάθε νέα διαγώνιος αλλάζει το ισοϋπόλοιπο των κορυφών των άκρων της. Υπάρχουν τρεις πιθανές περιπτώσεις:

1. Οι κορυφές έχουν διαφορετικό ισοϋπόλοιπο. Σε αυτή την περίπτωση η περιττή κορυφή θα γίνει άρτια και η άλλη θα αλλάξει από άρτια σε περιττή. Το πλήθος των περιττών κορυφών θα παραμείνει το ίδιο.

2. Και οι δύο κορυφές είναι περιττές. Σε αυτή την περίπτωση, η προσθήκη μιας διαγωνίου θα τις μετατρέψει σε άρτιες. Κατά συνέπεια το πλήθος των περιττών κορυφών θα μειωθεί κατά δύο.

3. Και οι δύο κορυφές είναι άρτιες. Με την προσθήκη μιας διαγωνίου θα μετατραπούν σε περιττές.

Βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις που το πλήθος των περιττών κορυφών είτε παραμένει αμετάβλητο είτε αλλάζει κατά δύο (αύξηση κατά δύο ή μείωση κατά δύο). Το ισοϋπόλοιπο του πλήθους, επομένως, παραμένει αναλλοίωτο. Δεδομένου ότι στην αρχή το πλήθος των περιττών κορυφών ήταν 0, δεν μπορεί ποτέ να γίνει περιττός αριθμός.

Πρόβλημα A6.

Σε τέσσερα κιβώτια ενός παλατιού υπάρχουν 507, 1006, 1505 και 2004 διαμάντια, αντίστοιχα. Κάθε ημέρα επιλέγονται στην τύχη ακριβώς δύο από αυτά κιβώτια και είτε ένα ή πέντε διαμάντια προστίθενται ή αφαιρούνται και από τα δύο. Είναι δυνατό σε κάποια στιγμή να υπάρχουν 2005, 2004, 2002 και 1998 διαμάντια, αντίστοιχα, στα τέσσερα κιβώτια;

Λύση.

Έστω S η συνολική ποσότητα διαμαντιών. Στην αρχή το S είναι άρτιος αριθμός. Η κατάληξη 2005, 2004, 2002 και 1998 διαμαντιών στα κιβώτια θα είχε το S περιττό αριθμό, έτσι η κατάσταση αυτή είναι αδύνατη.

Πρόβλημα A7.

Έστω $ABCDEF$ ένα εξάγωνο. Στις κορυφές A και C γράφεται ο αριθμός 1, και σε όλες τις υπόλοιπες γράφεται ο αριθμός 0. Ο Βασίλης μπορεί να επιλέξει δύο γειτονικές κορυφές (δηλαδή σημεία στα άκρα μιας πλευράς του εξαγώνου) και να αυξήσει και τους δύο αριθμούς των κατά 1. Κατόπιν, με τους νέους αριθμούς, εκτελεί την ίδια διαδικασία. Δηλαδή μπορεί να επιλέξει δύο γειτονικές κορυφές και να αυξήσει τους αριθμούς των κατά 1. Μπορεί ο Βασίλης να κάνει και τους έξι αριθμούς ίσους μεταξύ τους μετά από επαναλήψεις αυτής της διαδικασίας;

Λύση.

Συμβολίζουμε τους αριθμούς στις κορυφές μετά από την n -οστή κίνηση του Βασίλη ως $a_n, b_n, \dots, f_n$, αντίστοιχα. Στην αρχή έχουμε $a_0 = c_0 = 1$ και $b_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$. Για κάθε n εξετάζουμε τον αριθμό

$$S_n = a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n.$$

Είναι $S_0 = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 - f_0 = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2$. Εξετάζουμε τι συμβαίνει εάν ο Βασίλης επιλέξει τις γειτονικές κορυφές A και B : Οι αριθμοί στο A και στο B αυξάνονται κατά 1, $a_1 = a_0 + 1$, $b_1 = b_0 + 1$, και παρατηρούμε ότι ισχύει $a_1 - b_1 = a_0 - b_0$. Δεδομένου ότι οι αριθμοί στις άλλες κορυφές δεν επηρεάζονται από τη ενέργεια του Βασίλη ($c_1 = c_0$, $d_1 = d_0$, $e_1 = e_0$, $f_1 = f_0$), έχουμε την ισότητα $S_1 = S_0 = 2$. Ισχύει παρόμοιο συμπέρασμα εάν ο Βασίλης επιλέξει οποιοσδήποτε γειτονικές κορυφές, όχι ειδικά τις A και B (ελέγξτε αυτό με την εξέταση των υπόλοιπων ζευγαριών γειτονικών κορυφών: B και C , C και D , D και E , E και F , F και A). Συνεπώς, για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό k έχουμε

$$S_{k+1} = S_k = \dots = S_1 = S_0 = 2.$$

Με άλλα λόγια, ο αριθμός S_n παραμένει αμετάβλητος για κάθε n . Είναι "αναλλοίωτος" όσον αφορά την εξεταζόμενη διαδικασία.

Τώρα, εάν μετά από επαναλήψεις της διαδικασίας οι αριθμοί σε όλες κορυφές γινόντουσαν ίσοι, θα είχαμε $S_n = 0$ που είναι ένα αδύνατο. Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι η απάντηση στο πρόβλημα είναι «όχι».

Πρόβλημα A8 (από τον Διαγωνισμό πόλεων).

Σε ένα νησί υπάρχουν 13 λευκοί, 15 πράσινοι και 17 κόκκινοι χαμαιλέοντες. Όταν δύο διαφορετικού χρώματος χαμαιλέοντες αγγίζουν ο ένας τον άλλο, αλλάζουν και οι δύο στο τρίτο χρώμα. Μπορούν όλοι οι χαμαιλέοντες να γίνουν λευκοί;

Λύση.

Έστω S είμαι το σύνολο των υπολοίπων μόντουλο 3 του πλήθους των λευκών, πράσινων και κόκκινων χαμαιλέοντων, αντίστοιχα. Στην αρχή $S = \{1, 0, 2\}$. Υποθέστε ότι ένας λευκός και ένας πράσινος χαμαιλέοντας αγγίζουν ο ένας τον άλλο. Σύμφωνα με το πρόβλημα, θα γίνουν και οι δύο κόκκινοι. Το πλήθος των λευκών καθώς και των πράσινων χαμαιλέοντων θα μειωθεί κατά 1, και θα γίνει 12 και 14, αντίστοιχα. Τα υπόλοιπά τους μόντουλο 3 γίνονται 0 και 2, αντίστοιχα. Ο αριθμός κόκκινων χαμαιλέοντων αυξάνεται κατά 2 (γίνεται 19) και το υπόλοιπό του μόντουλο 3 είναι τώρα 1. Βλέπουμε ότι το σύνολο S των υπολοίπων γίνεται $\{0, 2, 1\}$. Αποτελείται πάλι από τους αριθμούς 0, 1, 2. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε (θεωρώντας τις άλλες δύο περιπτώσεις, "λευκός αγγίζει κόκκινο" και "πράσινος αγγίζει κόκκινο") ότι σε κάθε άγγιγμα, σύνολο S των υπολοίπων μόντουλο 3 παραμένει το ίδιο. Κάθε άγγιγμα μειώνει δύο από τα υπόλοιπα κατά 1 και αυξάνει το τρίτο κατά 2, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να μην αλλάζει το S . Δεδομένου ότι στην αρχή $S = \{1, 0, 2\}$ ενώ εάν όλοι (οι 45 το πλήθος) χαμαιλέοντας γίνουν λευκοί, το σύνολο S θα γίνει $S = \{0, 0, 0\}$, δεν μπορούν οι χαμαιλέοντας γίνουν όλοι λευκοί.

Σε αυτό το πρόβλημα η αναλλοίωτη ήταν διαφορετικής φύσης. Ήταν ένα σύνολο, όχι ένας αριθμός ή ένα ισοϋπόλοιπο ενός αριθμού.

Πρόβλημα A9.

Η Άννα έχει ένα κιβώτιο μέσα στο οποίο υπάρχουν με οκτώ μικρότερα κιβώτια. Μερικά από αυτά τα εσωτερικά κιβώτια περιέχουν οκτώ μικρότερα κιβώτια μεταξύ των οποίων πάλι υπάρχουν μερικά που περιέχουν οκτώ (ακόμα μικρότερα) κιβώτια. Είναι δυνατόν το πλήθος των κενών κιβωτίων σε μια τέτοια διαμόρφωση κιβωτίων (οποιοδήποτε μεγέθους) να είναι 1000;

Λύση.

Εξετάζουμε τη δεδομένη διαμόρφωση κιβωτίων υπό το πρίσμα της ακόλουθης απλής διαδικασίας. Αρχίζουμε με το εξωτερικό κιβώτιο που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως κενό και το γεμίζουμε με 8 κιβώτια. Σε κάθε βήμα κάνουμε το ίδιο πράγμα: προσθέτουμε 8 μικρότερα κιβώτια σε ένα επιλεγμένο κενό κιβώτιο, έως ότου καταλήξουμε τη δεδομένη διαμόρφωση των κιβωτίων. Η διαδικασία που έχουμε κατά

νου είναι "γεμίζουμε ένα κενό κιβώτιο με 8 μικρότερα". Είναι σαφές ότι, με αυτή την διαδικασία, μπορούμε να αναδημιουργήσουμε, βαθμιαία, την δεδομένη διαμόρφωση κιβωτίων.

Έστω S το υπόλοιπο μόντουλο 7 του πλήθους των κενών κιβωτίων σε ένα ορισμένο βήμα της παραπάνω κατασκευής. Στην αρχή έχουμε μόνο ένα κενό κιβώτιο (το εξωτερικό). Το υπόλοιπο μόντουλο 7 είναι, επομένως, ίσο με 1, δηλαδή είναι $S = 1$. Η πλήρωση του εξωτερικού κιβωτίου με 8 μικρότερα οδηγεί σε μια διαμόρφωση με 8 κενά κιβώτια: το εξωτερικό κιβώτιο δεν είναι πλέον κενό, γεμίζεται με 8 μικρότερα τα οποία είναι, προς το παρόν, κενά. Το υπόλοιπο μόντουλο 7 των 8 κενών κιβωτίων είναι πάλι $S = 1$. Κάθε διαδικασία μειώνει το πλήθος των κενών κιβωτίων κατά 1 και δημιουργεί 8 νέα κενά κιβώτια. Κατά συνέπεια κάθε εφαρμογή της διαδικασίας προσθέτει 7 κενά κιβώτια. Αυτό σημαίνει ότι ο υπόλοιπο μόντουλο 7 δεν αλλάζει. Είναι αναλλοίωτο και θα παραμείνει ίσο με 1. Δεδομένου ότι ο υπόλοιπο του 1000 μόντουλο 7 είναι 6, δεν μπορούμε ποτέ έχουμε 1000 κενά κιβώτια.

Πρόβλημα A10 (του Ivan Simeonov).

Μπορεί να καλυφθεί ένα τετράγωνο διαστάσεων 10×10 από 25 ορθογώνια διαστάσεων 4×1 ;

Λύση.

Αριθμούμε τις γραμμές και τις στήλες με τους αριθμούς 1 έως 10. Βάφουμε μαύρα όλα τα τετράγωνα που ανήκουν ταυτόχρονα σε γραμμές και σε στήλες με τους περιττούς δείκτες. Υπάρχουν 25 τέτοια μαύρα τετράγωνα. Κάθε 4×1 ορθογώνιο καλύπτει είτε 0 είτε 2 μαύρα τετράγωνα. Επομένως το πλήθος των μαύρων τετραγώνων που καλύπτονται από τα ορθογώνια είναι άρτιο και, έτσι δεν μπορεί να είναι 25. Αυτό σημαίνει ότι 25 ορθογώνια των δεδομένων διαστάσεων δεν μπορούν να καλύψουν το τετράγωνο.

Μπορεί κανείς να διατυπώσει την παραπάνω λύση στην γλώσσα των αναλλοίωτων: Υποθέστε ότι υπάρχει μια κάλυψη του τετραγώνου που αποτελείται από 25 ορθογώνια μεγέθους 4×1 . Έστω S το πλήθος των μαύρων τετραγώνων που καλύπτονται (είναι συνολικά 25). Εξετάζουμε την διαδικασία "αφαιρούμε ένα ορθογώνιο". Δεδομένου ότι κάθε ορθογώνιο καλύπτει 0 ή 2 μαύρα τετράγωνα, το πλήθος των καλυμμένων μαύρων τετραγώνων είναι πάντα περιττός αριθμός. Πρέπει να είναι περιττός ακόμα και όταν αφαιρεθούν όλα τα ορθογώνια. Άτοπο.

Πρόβλημα A11 (από τον διαγωνισμό "Um+").

Μπορεί να καλυφθεί ένα 8×8 τετράγωνο από 16 σχήματα αποτελούμενα από 4 τετράγωνα διαστάσεων 1×1 , έτσι ώστε το ένα από αυτά τα σχήματα να είναι τετράγωνο και όλα τα άλλα έχουν τη μορφή του γράμματος L;

Λύση.

Αριθμούμε τις γραμμές του τετραγώνου με τους αριθμούς 1 έως 8 και βάφουμε με μαύρο χρώμα τις γραμμές που έχουν περιττό δείκτη. Κάθε L -σχήμα καλύπτει είτε 1 είτε 3 μαύρα τετράγωνα, έτσι τα 15 L -σχήματα θα καλύψουν συνολικά ένα περιττό πλήθος από μαύρα τετράγωνα. Το τετραγωνικό σχήμα καλύπτει 2 μαύρα τετράγωνα. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος μαύρων τετραγώνων που καλύπτονται είναι περιττό, έτσι δεν μπορεί να είναι 32, όπως απαιτείται. Το τετράγωνο, λοιπόν, δεν μπορεί να καλυφθεί από τα σχήματα που περιγράφηκαν.

Πρόβλημα A12 (του Mircea Ganga).

Ένας 8×8 πίνακας από τετραγωνάκια καλύπτεται από 21 ορθογώνια διαστάσεων 3×1 , και ένα τετραγωνάκι μένει ακάλυπτο. Μπορεί αυτό το τετραγωνάκι να είναι στη γωνία;

Λύση.

Έστω ότι το ακάλυπτο τετραγωνάκι είναι στην πάνω αριστερή γωνία. Αριθμούμε τα τετράγωνα του 8×8 ως εξής:

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Τα τετραγωνάκια με "2" είναι 22, ενώ με "1" και "3" είναι 21. Δεδομένου ότι κάθε 3×1 ορθογώνιο καλύπτει τρεις διαφορετικούς αριθμούς, το ακάλυπτο τετραγωνάκι έπρεπε να περιέχει "2", ενώ περιέχει ένα "1". Άτοπο.

§2. Παιχνίδια

Πρόβλημα B1. Η Άννα και ο Βασίλης παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Αρχίζουν γράφοντας τον αριθμό 0. Κατόπιν παίζουν εναλλάξ: πρώτη η Άννα, έπειτα ο Βασίλης, έπειτα ξανά η Άννα, έπειτα ο Βασίλης, και ούτω καθ' εξής. Κάθε φορά ο παίκτης πρέπει να προσθέσει έναν μονοψήφιο φυσικό αριθμό στον τελευταίο γραμμένο αριθμό, και να γράψει στην θέση του το άθροισμα. Ο πρώτος που θα γράψει τριψήφιο αριθμό, κερδίζει. Υπάρχει τρόπος με τον οποίο κάποιος από τους παίκτες να εξασφαλίσει την νίκη του; Με άλλα λόγια, κάνει κάποια "στρατηγική νίκης" για κάποιον από τους παίκτες;

Λύση.

Εάν κάποιος από τους παίκτες λάβει τον αριθμό 91 (ή κάποιον μεγαλύτερο) πριν από την κίνησή του, μπορεί να κερδίσει με την πρόσθεση του 9. Συνεπώς κανένας δεν επιθυμεί να αφήσει τον 91 (ή κάποιον μεγαλύτερο) μετά από την κίνησή του. Κατά συνέπεια, εάν κάποιος λάβει 90, τότε έχει πρόβλημα: οποιονδήποτε αριθμό και αν προσθέσει κατά την κίνησή του θα δώσει την δυνατότητα στο άλλο παίκτη να κερδίσει. Εάν κάποιος λάβει έναν αριθμό μεταξύ 81 και 89 πριν από την κίνησή του, μπορεί να κερδίσει με την προσθήκη ενός αριθμού προκειμένου να αφήσει 90 στον άλλον. Συνεπώς, κανένας δεν επιθυμεί να αφήσει τον 81 (ή κάποιον μεγαλύτερο) μετά από την κίνησή του. Κατά συνέπεια εάν κάποιος λάβει 80, τότε έχει πρόβλημα: οποιαδήποτε κίνηση θα δώσει την δυνατότητα στο άλλο παίκτη να κερδίσει. Συλλογιζόμενοι με αυτό τον τρόπο βλέπουμε ότι θα κερδίσει ο Βασίλης εάν αφήσει ένα πολλαπλάσιο του 10 μετά από την κίνησή του. Μετά από κάθε πιθανή κίνηση της Άννας, μπορεί να προσθέσει έναν κατάλληλο αριθμό προκειμένου να αφήσει στην αντίπαλό του το επόμενο πολλαπλάσιο του 10. Παραδείγματος χάριν, εάν η Άννα επιλέξει το 2 στην αρχή, το Βασίλης θα επέλεγε το 8 έτσι ώστε το άθροισμα να γίνει 10. Κατόπιν, οτιδήποτε και αν προσθέσει η Άννα, το Βασίλης θα το στρογγυλοποιούσε στο 20, και τα λοιπά. Τα παραπάνω είναι μια στρατηγική νίκης για τον Βασίλη, δηλαδή για το δεύτερο παίκτη.

Πρόβλημα B2.

Ο Tom και ο Jerry έχουν ένα κουτί με 100 καραμέλες και παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Ο πρώτος Tom, έπειτα ο Jerry, έπειτα ο Tom, έπειτα ο Jerry και ούτω καθ'

εξής τρώνε μια ή δύο καραμέλες τη φορά. Εκείνος που θα φάει την τελευταία καραμέλα, κερδίζει. Ποιος θα κερδίσει, εάν και οι δύο παίζουν σωστά;

Λύση.

Εάν κάποιος από τους παίκτες έχει 3 καραμέλες πριν από την κίνησή του, δεν μπορεί να κερδίσει οτιδήποτε και αν παίξει. Κατά συνέπεια το "3" είναι "κακή θέση". Εάν κάποιος έχει 6 καραμέλες πριν από την κίνησή του, δεν μπορεί να κερδίσει οτιδήποτε και αν παίξει γιατί ο άλλος παίκτης θα αφήσει 3 καραμέλες μετά από την κίνησή του και, όπως περιγράψαμε στα παραπάνω, θα κερδίσει. Κατά συνέπεια το "6" είναι επίσης "κακή θέση". Όμοια, οι κακές θέσεις είναι "9", "12", κ.λπ. Συμπεραίνουμε ότι μπορεί να κερδίσει ο Tom, εάν φάει μια καραμέλα στην πρώτη κίνησή του και ακολουθήσει έπειτα τον κανόνα: "αφήνω ένα πολλαπλάσιο του 3 στον συμπαίκτη μου".

Πρόβλημα B3 (του Cyril Bankov).

Ο Tom και ο Jerry παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι σε μια σκακιέρα. Ένας πύργος, το μόνο πούλι στη σκακιέρα, τοποθετείται στο κάτω αριστερό τετράγωνο. Παίζει πρώτος Tom, έπειτα ο Jerry, έπειτα ξανά ο Tom και ούτω καθ' εξής, διαδοχικά. Σε κάθε κίνηση, ο παίκτης πρέπει να μετακινήσει τον πύργο οσαδήποτε τετράγωνο δεξιά ή πάνω. Χάνει εκείνος ο οποίος δεν μπορεί να κάνει κίνηση. Έχει κανείς τους κάποια νικηφόρα στρατηγική;

Λύση.

Η μόνη θέση από την οποία δεν μπορεί να κινηθεί ο πύργος είναι η άνω δεξιά γωνία. Ο Jerry μπορεί να κερδίσει χρησιμοποιώντας την ακόλουθη στρατηγική: φροντίζει να αφήσει τον πύργο στη διαγώνιο που συνδέει το κάτω αριστερό τετράγωνο με το άνω δεξιό. Από μια τέτοια θέση ο Tom δεν μπορεί να τοποθετήσει τον πύργο στο άνω γωνιακό τετράγωνο, έτσι ο Jerry δεν μπορεί να χάσει. Κάθε πιθανή κίνηση του Tom επιτρέπει στον Jerry για να ακολουθήσει τη στρατηγική του. Δεδομένου ότι το παιχνίδι τελειώνει, ο Jerry θα κερδίσει.

Πρόβλημα B4 (του Cyril Bankov).

Ο Tom και ο Jerry έχουν δύο κουτιά, το ένα με 20 και το άλλο με 21 καραμέλες. Παίζει πρώτος Tom, έπειτα ο Jerry, έπειτα ξανά ο Tom και ούτω καθ' εξής, διαδοχικά. Σε κάθε κίνηση, αυτός που έχει σειρά να παίξει, πρέπει να φάει ολόκληρο το περιεχόμενο ενός από τα κουτιά και να μετακινήσει ένα μέρος, αλλά όχι όλες, τις καραμέλες από το άλλο κουτί προς αυτό που μόλις άδειασε. Χάνει εκείνος ο οποίος δεν μπορεί να κάνει κίνηση. Έχει κανείς τους κάποια νικηφόρα στρατηγική;

Λύση.

Ο Tom μπορεί να κερδίσει με την ακόλουθη στρατηγική: φροντίζει να αφήσει περιττό πλήθος από καραμέλες και στα δύο κουτιά. Μετά από μια τέτοια κίνηση ο Jerry είναι αναγκασμένος να αφήσει ένα άρτιο πλήθος από καραμέλες σε (ακριβώς) ένα από τα κουτιά, έτσι ο Tom μπορεί πάντα να παίξει σύμφωνα με την στρατηγική του. Δεδομένου ότι το παιχνίδι τελειώνει, ο Tom θα κερδίσει.

Πρόβλημα B5.

Γράφουμε στον πίνακα τον αριθμό 2006!, ο οποίος είναι εξ ορισμού ίσος με το γινόμενο των αριθμών 1, 2, 3, ..., 2006. Δύο παίκτες παίζουν διαδοχικά σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα: εάν είναι γραμμένος ο αριθμός X στον πίνακα, ο παίκτης που είναι η σειρά του να παίξει επιλέγει έναν θετικό ακέραιο $Y \leq X$ ο οποίος έχει λιγότερους από 20 διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες, και αντικαθιστά τον X από τη διαφορά $X - Y$. Κερδίζει εκείνος ο παίκτης που θα γράψει τον 0. Έχει κανείς τους κάποια νικηφόρα στρατηγική;

Λύση.

Έστω p_i ο i -στός πρώτος αριθμός και έστω $P = p_1 p_2 \dots p_{20}$ το γινόμενο των μικρότερων 20 πρώτων αριθμών. Εάν $X < P$, ο παίκτης που έχει σειρά μπορεί να κερδίσει με την αφαίρεση του X . Το ίδιο το P είναι "κακή" θέση: ο επόμενος παίκτης δεν μπορεί να κερδίσει, και οτιδήποτε παίξει, ο άλλος παίκτης μπορεί να κερδίσει με την επόμενη κίνησή του. Εξετάζουμε τις θέσεις kP , $k = 1, 2, \dots$. Έχουμε:

α) Εάν ο αριθμός στον πίνακα είναι της μορφής kP , ο παίκτης που έχει σειρά να παίξει δεν μπορεί να αφήσει τον αντίπαλό του με αριθμό της μορφής mP για $m = 0, 1, 2, \dots, (k-1)$, δεδομένου ότι αυτό απαιτεί αφαίρεση ενός αριθμού που έχει τουλάχιστον 20 διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες. Ειδικότερα, δεν μπορεί να κερδίσει άμεσα.

β) Εάν ο αριθμός στον πίνακα είναι μεταξύ kP και $(k+1)P$, ο παίκτης που έχει σειρά να παίξει μπορεί να αφήσει τον αντίπαλό του το αριθμό kP .

Δεδομένου ότι η αρχική θέση είναι το $2006! = nP$, ο δεύτερος παίκτης μπορεί πάντα να εφαρμόσει το β) για να αφήσει στον άλλον έναν αριθμό της μορφής kP μετά από την κίνησή του. Δεδομένου ότι το παιχνίδι τελειώνει, αυτό εξασφαλίζει τη νίκη στον δεύτερο παίκτη.

§3. Ημιαναλλοιώτες

Πρόβλημα C1 (Πανερωσιακή Ολυμπιάδα ΕΣΣΔ, 1961).

Κάθε τετράγωνο ενός $m \times n$ ορθογώνιου πίνακα συμπληρώνεται από έναν ακέραιο αριθμό. Επιτρέπεται να αλλαχτούν τα πρόσσημα όλων των αριθμών σε οποιαδήποτε γραμμή ή σε οποιαδήποτε στήλη. Αποδείξτε ότι μετά από ορισμένες τέτοιες αλλαγές προσήμων μπορεί κανείς να πάρει έναν πίνακα στον οποίο το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη είναι μη αρνητικό.

Λύση.

Έστω το S το άθροισμα των αριθμών στον πίνακα. Εάν κάθε γραμμή και κάθε στήλη έχει μη αρνητικό άθροισμα, τελειώσαμε. Εάν υπάρχει γραμμή ή στήλη με αρνητικό άθροισμα, εφαρμόζουμε σε αυτήν τη γραμμή ή στήλη τη διαδικασία αλλαγής προσήμων. Το αποτέλεσμα είναι ότι το S θα αυξηθεί (θεωρήστε το S ως το άθροισμα όλων των αθροισμάτων των γραμμών ή στηλών οι οποίες είναι παράλληλες στην επιλεγμένη γραμμή ή στήλη). Δεδομένου ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένες το πλήθος πιθανές επιλογές για τα πρόσσημα των ακεραίων αριθμών στον πίνακα, υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος πιθανές τιμές του S . Κατά συνέπεια δεν μπορούμε να επιλέγουμε για πάντα γραμμές ή στήλες με τα αρνητικά αθροίσματα. Επομένως, σε κάποιο σημείο όλες οι γραμμές και στήλες πρέπει να έχουν τα μη αρνητικά αθροίσματα.

Πρόβλημα C2 (του Ivan Simeonov).

Δίνονται $2n$ τα διαφορετικά σημεία στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχουν n ξένα ανά δύο ευθύγραμμα τμήματα με άκρα στα σημεία αυτά.

Λύση.

Ενώνουμε τα σημεία ανά ζεύγη, με αυθαίρετο τρόπο. Έστω S το άθροισμα των μηκών όλων των ευθυγράμμων τμημάτων σχεδιάστηκαν. Εάν τα τμήματα είναι ξένα ανά δύο, τελειώσαμε. Διαφορετικά, εάν το AB και το CD έχουν κοινό σημείο, το σημείο αυτό δεν είναι άκρο ευθυγράμμου τμήματος, δεδομένου ότι τα σημεία είναι διαφορετικά. Τώρα, αντικαθιστούμε το AB και το CD από τα AC και BD . Η τριγωνική ανισότητα δείχνει ότι το S θα μειωθεί. Δεδομένου ότι υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος δυνατοί τρόποι να συνδεθούν $2n$ τα σημεία, υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος δυνατές τιμές του S . Κατά συνέπεια το S δεν μπορεί να μειώνεται για πάντα.

Επομένως σε κάποια στιγμή η διαδικασία πρέπει να σταματήσει, δηλαδή όλα τα τμήματα θα είναι ξένα ανά δύο.

1

Πρόβλημα C3 (Πανενωσιακή Ολυμπιάδα ΕΣΣΔ, 1971).

Κάθε μέλος ενός Κοινοβουλίου έχει το πολύ 3 εχθρούς. Δείξτε ότι το Κοινοβούλιο μπορεί να διαιρεθεί σε δύο κόμματα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μέλος να έχει το πολύ έναν εχθρό στο κόμμα που ανήκει.

Λύση.

Διαιρέστε το Κοινοβούλιο σε δύο κόμματα, κατά αυθαίρετο τρόπο. Έστω S ο συνολικός αριθμός ζευγών από εχθρούς που προέρχονται από το ίδιο κόμμα. Εάν ο καθένας έχει το πολύ έναν εχθρό μέσα στο κόμμα του, τελειώσαμε. Διαφορετικά κάποιος έχει τουλάχιστον δύο εχθρούς στο κόμμα του. Εάν τον μετακινήσουμε στο άλλο κόμμα, θα έχει το πολύ έναν εχθρό εκεί επειδή ο συνολικός αριθμός εχθρών αυτού του προσώπου είναι το πολύ 3 και δύο ή τρεις από αυτούς είναι στο παλιό του κόμμα. Κατά συνέπεια το S μειώνεται με την μετακίνηση.

Δεδομένου ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένες το πλήθος διαμερίσεις του Κοινοβουλίου σε δύο κόμματα, η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχιστεί για πάντα. Κατά συνέπεια σε κάποιο βήμα θα έχουμε έναν διαχωρισμό όπως το ζητά το πρόβλημα.

Πρόβλημα C4 (Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, Βαρσοβία 1986).

Τοποθετούμε στις κορυφές ενός πενταγώνου από έναν ακέραιο αριθμό, έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι θετικό. Εάν οι αριθμοί σε οποιεσδήποτε τρεις διαδοχικές κορυφές είναι x, y, z όπου $y < 0$, τους αντικαθιστούμε με τους αριθμούς $x+y, -y$ και $z+y$, αντίστοιχα. Μπορεί η διαδικασία αυτή να επαναληφθεί άπειρες φορές;

Λύση.

Έστω a, b, c, d, e οι αριθμοί στις πέντε κορυφές. Θέτουμε

$$S(a,b,c,d,e) = (a-c)^2 + (b-d)^2 + (c-e)^2 + (d-a)^2 + (e-b)^2.$$

Υποθέστε, για παράδειγμα, ότι $c < 0$ και ότι αντικαθιστούμε τους b, c, d με τους $b+c, -c, d+c$, αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned} S(a,b+c,-c,d+c,e) - S(a,b,c,d,e) &= (a+c)^2 + (b-d)^2 + (c+e)^2 + (c+d-a)^2 + (b+c-e)^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2 - (c-e)^2 - (d-a)^2 - (b-e)^2 \\ &= 4ac + 4ce + c(c+2d-2a) + c(c+2b-2e) \\ &= c(4a+4e+c+2d-2a+c+2b-2e) = 2c(a+b+c+d+e) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι οι τιμές του S είναι θετικοί ακέραιοι και το ίδιο φθίνει μετά από κάθε αλλαγή, η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον.

§4. Προτεινόμενα προβλήματα

Οι λύσεις στα προβλήματα που ακολουθούν είναι παρόμοιες με τις λύσεις των προβλημάτων που εξετάσαμε παραπάνω. Συνιστάμε ισχυρά να προσπαθήσει κανείς πρώτα να τα λύσει μόνος του και μόνο αργότερα να συμβουλευθεί, αν χρειαστεί, τις λύσεις που δίνονται στο τέλος της ενότητας.

Πρόβλημα D1.

Σε ένα δέντρο υπάρχουν 100 χρυσά μήλα. Κάθε βράδυ ένας δράκος τρώει δύο μήλα. Υπάρχει ημέρα όπου το δέντρο θα έχει ακριβώς 5 μήλα; Υποθέστε ότι δεν φυτρώνουν νέα μήλα στο δέντρο.

Πρόβλημα D2.

Σε ένα λεωφορείο υπάρχουν 11 άτομα. Σε κάθε στάση κατεβαίνουν 3 άτομα ενώ επιβιβάζονται 5 νέα. Υπάρχει στάση μετά από την οποία θα υπάρχουν ακριβώς 100 άτομα στο λεωφορείο;

Πρόβλημα D3.

Η Άννα έχει γράψει 20 ακέραιους αριθμούς, 7 από τους οποίους είναι περιττοί. Διαγράφει δύο από τους αριθμούς και γράφει το άθροισμα των τετραγώνων τους. Κατόπιν επαναλαμβάνει αυτήν την διαδικασία με το νέο κατάλογο αριθμών, έως ότου μείνει μόνο ένας αριθμός. Είναι ο τελευταίος αυτός αριθμός άρτιος ή περιττός;

Πρόβλημα D4 (Εθνική Βουλγαρική Μαθηματική Ολυμπιάδα, 2004).

Σε μια λέξη που αποτελείται από τα γράμματα α και β είναι επιτρεπτές οι ακόλουθες αντικαταστάσεις:

1. αντικατάσταση του $\alpha\beta\alpha$ από το β ή αντίστροφα,
2. αντικατάσταση του $\beta\beta\alpha$ από το α ή αντίστροφα,
3. αντικατάσταση του $\alpha\beta\beta$ από το $\beta\beta\alpha$ ή αντίστροφα,
4. αντικατάσταση του $\alpha\alpha\beta$ από το $\beta\alpha\alpha$ ή αντίστροφα.

Αρχίζουμε από μια λέξη που αποτελείται από 2005 α , ακολουθούμενα από ένα β . Μπορούμε να καταλήξουμε σε λέξη που αρχίζει με ένα β το οποίο ακολουθείται από 2005 α ;

Πρόβλημα D5 (του Mircea Ganga).

Δέκα νομίσματα τοποθετούνται ανά ένα στις κορυφές δεκαγώνου. Σε κάθε κίνηση μπορούμε να επιλέξουμε δύο από τα νομίσματα και να μετακινήσουμε το καθένα σε γειτονική κορυφή. Μπορούμε να συγκεντρώσουμε όλα τα νομίσματα σε μία κορυφή;

Πρόβλημα D6.

Τοποθετούνται n νομίσματα, ανά ένα, στις κορυφές ενός n - γώνου. Σε κάθε κίνηση μπορούμε να επιλέξουμε δύο από τα νομίσματα και να κινήσουμε το καθένα σε γειτονική κορυφή. Μπορούμε να συγκεντρώσουμε όλα τα νομίσματα σε μία κορυφή;

Πρόβλημα D7.

Σε ένα λεωφορείο υπάρχουν 12 άτομα. Σε κάθε στάση κατεβαίνουν 2 άτομα και επιβιβάζονται 5 νέα. Υπάρχει στάση μετά την οποία να υπάρχουν στο λεωφορείο ακριβώς 100 άτομα;

Πρόβλημα D8.

Ο γενναίος ιππότης συνάντησε έναν δράκο με τρία κεφάλια και, όπως είναι φυσικό, αποφάσισε να του κόψει όλα τα κεφάλια. Όμως, μετά από κάθε κόψιμο ενός κεφαλιού, φυτρώνουν στη θέση του οκτώ νέα. Ο ιππότης όμως συνέχισε να κόβει κεφάλια. Στο τέλος αποφάσισε να μετρήσει τα κεφάλια του αναβαθμισμένου δράκου. Μέτρησε 2006. Μέτρησε σωστά;

Πρόβλημα D9.

Δίνεται οι πέντε αριθμοί 2, 2, 3, 4, 4. Σε κάθε βήμα, μπορούμε να επιλέξουμε δύο από αυτούς, έστω τους a και b , και να τους αντικαταστήσουμε από τους $2a - b$ και $2b - a$.

- α) Μπορούμε να λάβουμε σε κάποιο στάδιο τους αριθμούς 0, 2, 3, 4, 6;
- β) Τι γίνεται με τους αριθμούς 2, 2, 3, 4, 6;

Πρόβλημα D10.

Ένας Ίππος τοποθετείται στην κάτω αριστερή γωνία μιας 8x8 σκακιέρας. Ο Ίππος κάνει την συνηθισμένη του κίνηση στο σκάκι (δύο τετράγωνα οριζοντίως ή καθέτως και έπειτα ένα τετράγωνο στην κάθετη κατεύθυνση). Είναι δυνατό ότι μετά από ακριβώς 9 κινήσεις του Ίππου, να φτάσει στην άνω δεξιά γωνία της σκακιέρας;

Πρόβλημα D11.

Μπορούν να τοποθετηθούν 31 ντομινό διαστάσεων 2×1 σε μια σκακίερα, χωρίς επικαλύψεις, έτσι ώστε να μείνουν ακάλυπτα τα δύο τετράγωνα στα άκρα μιας διαγωνίου;

Πρόβλημα D12 (του Mircea Ganga).

Ένα T – τετρόμινο αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα που διατάσσονται όπως στο γράμμα. Μπορεί να καλυφθεί ένα 50×50 τετράγωνο από 625 T -τετρόμινα;

Πρόβλημα D13 (του Mircea Ganga).

Γράφουμε τους αριθμούς από 1 στο n με κάποια διάταξη. Μια κίνηση αποτελείται από την αμοιβαία ανταλλαγή οποιωνδήποτε δύο γειτονικών αριθμών. Είναι δυνατό μετά από ένα περιττό πλήθος κινήσεων να έρθουν οι αριθμοί στην φυσική τους διάταξη;

Πρόβλημα D14.

Γράφουμε τους αριθμούς από 1 στο n με κάποια διάταξη. Μια κίνηση αποτελείται από την αμοιβαία ανταλλαγή οποιωνδήποτε δύο αριθμών (όχι κατ' ανάγκη γειτονικών). Είναι δυνατό μετά από ένα περιττό πλήθος κινήσεων να έρθουν οι αριθμοί στην φυσική τους διάταξη;

Πρόβλημα D15.

Στο δημοφιλές *Παιχνίδι των 15*, μια 4×4 σκακίερα έχει ένα κενό τετράγωνο και άλλα περιέχουν νομίσματα, που αριθμούνται (αυθαίρετα) από τους αριθμούς από 1 έως 15. Δύο τετράγωνα καλούνται *γειτονικά* εάν έχουν μια κοινή πλευρά. Μια κίνηση αποτελείται από την μετακίνηση ενός νομίσματος από ένα από τα τετράγωνα σε ένα διπλανό κενό τετράγωνο. Υπάρχει ακολουθία κινήσεων μετά την οποία το νόμισμα k και το νόμισμα $16-k$ να ανταλλάσσουν θέσεις, για κάθε $k = 1, 2, \dots, 7$ (δηλαδή, μπορεί κανείς να αναδιατάξει τα νομίσματα με την αντίστροφη σειρά τους);

Πρόβλημα D16 (Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα).

Σε έναν $3 \times 3 \times 3$ κύβο, ένας από τους 27 μικρότερους κύβους που αποτελούν τον αρχικό είναι κενός, και οι υπόλοιποι περιέχουν κύβους πλευράς 1, που αριθμούνται από το 1 έως 26. Δύο κύβοι ονομάζονται *γειτονικοί* εάν έχουν κοινή έδρα. Μια κίνηση αποτελείται από τη μετακίνηση ενός από τους 26 κύβους σε γειτονικό κενό χώρο. Υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων μετά την οποία ο κύβος k και ο κύβος $27-k$ να ανταλλάσσονται αμοιβαία, για κάθε $k = 1, 2, \dots, 13$ (δηλαδή, μπορεί κανείς να αναδιατάξει τους κύβους με την αντίστροφη σειρά τους);

Πρόβλημα D17 (Διαγωνισμός Πόλεων).

Ένας 7×7 τετράγωνο καλύπτεται από 16 ορθογώνια διαστάσεων 3×1 , και ένα τετράγωνο μένει κενό. Βρείτε όλες τις δυνατές θέσεις του κενού τετραγώνου.

Πρόβλημα D18.

Σε ένα νησί υπάρχουν 13 λευκοί, 15 πράσινοι και 17 κόκκινοι χαμαιλέοντες. Όταν δύο χαμαιλέοντες διαφορετικού χρώματος αγγίζουν ο ένας τον άλλο, αλλάζουν και οι δύο στο τρίτο χρώμα.

- α) Μπορεί ποτέ οι λευκοί και πράσινοι χαμαιλέοντες να γίνουν ισοπληθείς;
- β) Μπορεί να συμβεί να ξεπερνούν αριθμητικώς κατά 3 οι πράσινοι χαμαιλέοντες τους κόκκινους;
- γ) Μπορεί να συμβεί να γίνουν οι κόκκινοι χαμαιλέοντες κατά 6 περισσότεροι από τους λευκούς;

Πρόβλημα D19 (του Cyril Bankov).

Ο Tom και ο Jerry παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι σε μια σκακιέρα. Ένας βασιλιάς τοποθετείται στην κάτω αριστερή γωνία της σκακιέρας. Πρώτος παίζει ο Tom, μετά ο Jerry, κατόπιν ξανά ο Tom, κ.λπ., εκ περιτροπής. Σε κάθε γύρο ο παίκτης πρέπει να κινήσει τον βασιλιά ένα τετράγωνο δεξιά ή ένα πάνω ή ένα διαγωνίως προς τα δεξιά και πάνω. Χάνει εκείνος ο παίκτης που δεν μπορεί να κάνει κίνηση. Έχει κάποιος από τους δύο μια στρατηγική νίκης;

§5. Λύσεις στα προβλήματα της §4

Λύση του προβλήματος D1. Κατά τη διάρκεια στις πρώτης νύχτας ο αριθμός μήλων στο δέντρο θα μειωθεί κατά 2, οπότε θα γίνει $100 - 2 = 98$. Σημειώστε ότι 100 είναι άρτιος αριθμός, και όταν τον μειώσουμε κατά δύο, παίρνουμε 98, ο οποίος είναι στις άρτιος αριθμός. Μετά από την επόμενη νύχτα ο αριθμός μήλων γίνεται $98 - 2 = 96$, και ο 96 είναι στις ακόμα άρτιος αριθμός. Στις επόμενες ημέρες ο αριθμός μήλων θα γίνει 94, 92, 90, 88, ... και αυτοί είναι στις άρτιοι αριθμοί (όταν αφαιρεθεί το 2 από έναν άρτιο αριθμό, το αποτέλεσμα είναι πάλι άρτιος). Συνεπώς κάθε ημέρα ο αριθμός μήλων θα είναι άρτιος, οπότε δεν είναι δυνατό να γίνουν ποτέ τα μήλα ακριβώς 5, επειδή το 5 είναι περιττός.

Λύση του προβλήματος D2.

Όχι. Το πλήθος των ατόμων στο λεωφορείο αυξάνει κατά δύο μετά από κάθε στάση, και γίνεται διαδοχικά 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... Ο αριθμός στις παραμένει περιττός. Έτσι δεν γίνει ποτέ ίσος με τον άρτιο αριθμό 100.

Λύση του προβλήματος D3.

Έστω S το πλήθος των περιττών αριθμών στον κατάλογο στις Άννας. Στην αρχή $S = 7$. Κάθε ενέργεια στις Άννας είτε αφήνει το S αμετάβλητο ή το μειώνει κατά 2. Συνεπώς το ισοϋπόλοιπο του S μένει αναλλοίωτο. Δεδομένου ότι στο τέλος πρέπει να έχουμε $S \leq 1$, παίρνουμε $S = 1$. Έτσι ο τελευταίος αριθμός είναι περιττός.

Λύση του προβλήματος D4.

Παρατηρήστε ότι με στις παραπάνω αντικαταστάσεις το πλήθος των γραμμάτων a τα οποία βρίσκονται στις άρτιες θέσεις, συντηρεί το ισοϋπόλοιπό του. Μένει τώρα να παρατηρήσει κανείς ότι στην επιθυμητή λέξη το πλήθος των a στις άρτιες θέσεις είναι 1003, ενώ στη δεδομένη λέξη το πλήθος των a στις άρτιες θέσεις είναι 1002. Συνεπώς η λέξη αυτή δεν μπορεί να ληφθεί χρησιμοποιώντας στις αναφερθείσες αντικαταστάσεις.

Λύση του προβλήματος D5.

Όχι. Αριθμούμε στις κορυφές ως 1, 2, ... , 10, αντίστοιχα. Στην αρχή, το πλήθος των νομισμάτων στις περιττές θέσεις είναι περιττό (5). Σε κάθε κίνηση, στις ο αριθμός είτε δεν αλλάζει ή αλλάζει κατά δύο, οπότε θα παραμείνει πάντα περιττός. Αλλά εάν τα νομίσματα ήταν σε μία κορυφή, ο αριθμός θα ήταν άρτιος. Άτοπο.

Μια άλλη προσέγγιση είναι η ακόλουθη. Αριθμούμε στις κορυφές ως 1, 2, ... , 10, αντίστοιχα. Σε κάθε κατάσταση, η αξία στις δεδομένου νομίσματος λαμβάνεται ίση με τον αριθμό στις κορυφές όπου κείται. Το άθροισμα των τιμών των νομισμάτων στην αρχή είναι $1 + 2 + \dots + 10 = 55$. Η μετακίνηση στις νομίσματος στην γειτονική κορυφή αλλάζει την αξία του κατά 1 ή 9, έτσι η συνολική αλλαγή των τιμών των δύο νομισμάτων είναι άρτιος αριθμός. Δεδομένου ότι το άθροισμα των τιμών είναι περιττό στην αρχή, θα παραμείνει περιττό. Αλλά εάν τα νομίσματα συγκεντρωθούν όλα σε κάποιο κορυφή, το άθροισμα των τιμών στις θα ήταν 10 φορές ο αριθμός σε αυτή την κορυφή. Στις το τελευταίο είναι άρτιος αριθμός και συνεπώς δεν μπορεί να ληφθεί.

Λύση του προβλήματος D6.

Στις στην προηγούμενο πρόβλημα αριθμούμε στις κορυφές ως 1, 2, ..., n . Παρατηρείστε πρώτα απ' όλα ότι όταν το n είναι περιττός, μπορούμε να συγκεντρώσουμε χωρίς δυσκολία όλα τα νομίσματα σε μία κορυφή: επιλέγουμε κάποια κορυφή και συγκεντρώνουμε όλα τα άλλα νομίσματα εκεί μετακινώντας κάθε φορά στις αυτήν δύο ισαπέχοντα από αυτήν νομίσματα.

Δεύτερον, παρατηρείστε ότι εάν το n είναι πολλαπλάσιο του 4, μπορούμε πρώτα να κινήσουμε όλα τα νομίσματα που βρίσκονται στις περιττές θέσεις σε γειτονικές άρτιες θέσεις (με αρίθμηση των αμέσως μεγαλύτερο άρτιο, κάθε φορά). Αυτό σημαίνει την μετακίνηση στις άρτιου πλήθους νομισμάτων έτσι είναι εφικτό. Κατόπιν μπορούμε ελεύθερα να κινήσουμε ζευγάρια νομισμάτων, και ειδικότερα μπορούμε να τα συγκεντρώσουμε σε μία κορυφή.

Τέλος, έστω $n = 4k+2$ για κάποιο ακέραιο αριθμό k . Σε κάθε κατάσταση, η αξία στις δεδομένου νομίσματος λαμβάνεται ίση με τον αριθμό στις κορυφές όπου κείται. Το άθροισμα των τιμών των νομισμάτων στην αρχή είναι $1 + 2 + \dots + (4k+2) = (2k+1)(4k+3)$, το οποίο είναι περιττός αριθμός. Η κίνηση στις νομίσματος σε γειτονικά κορυφή αλλάζει την αξία του κατά έναν περιττό αριθμό (1 ή $4k+1$), έτσι η συνολική αλλαγή των τιμών των δύο νομισμάτων είναι άρτιος αριθμός. Δεδομένου ότι το άθροισμα των τιμών είναι περιττό στην αρχή, θα παραμείνει περιττό. Αλλά εάν τα νομίσματα μπορούσαν να συγκεντρωθούν σε κάποια κορυφή, τότε το άθροισμα των τιμών στις θα ήταν $4k+2$ φορές ο αριθμός στις κορυφές. Το τελευταίο είναι άρτιος αριθμός, οπότε ο στόχος στις δεν μπορεί να επιτευχθεί.

Λύση του προβλήματος D7.

Όχι. Το πλήθος των ατόμων στο λεωφορείο μετά από κάθε στάση παραμένει πολλαπλάσιο του τρία.

Λύση του προβλήματος D8.

Όχι. Μετά από κάθε κύπημα, το πλήθος των κεφαλιών αυξάνει κατά 7. Έτσι το πλήθος των κεφαλιών θα παραμένει ίσο με 3 μόντουλο 7. Το 2006, στις, ισούται με 4 μόντουλο 7. Με άλλα λόγια, ο ιππότης δεν μέτρησε σωστά.

Λύση του προβλήματος D9.

A) Ναι. Πάρτε $a = 2$, $b = 4$.

B) Όχι. Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των πέντε αριθμών παραμένει αναλλοίωτο από το μετασχηματισμό. Αφού το αρχικό άθροισμα είναι 15, ενώ τελικό θα ήταν 17, ο στόχος δεν είναι εφικτός.

Λύση του προβλήματος D10.

Όχι. Μετά από κάθε κίνηση ο Ίππος πηγαίνει σε τετραγωνάκι διαφορετικού χρώματος. Κατά συνέπεια μετά από 9 κινήσεις το χρώμα του τετραγώνου άφιξης θα διαφέρει από το αρχικό. Αλλά τα δύο αναφερθέντα είναι τετράγωνα του ίδιου χρώματος.

Λύση του προβλήματος D11.

Δύο τετράγωνα στην άκρη μιας διαγωνίου έχουν το ίδιο χρώμα. Κάθε ντόμινο, εντούτοις, καλύπτει ένα μαύρο και ένα άσπρο τετράγωνο. Άρα το πλήθος των μαύρων τετραγώνων που καλύπτονται, ισούται με αυτόν των άσπρων (31). Τα υπόλοιπα δύο τετράγωνα θα έπρεπε να είχαν διαφορετικά χρώματα για να έχει ελπίδα να επιτευχθεί ο στόχος.

Λύση του προβλήματος D12.

Όχι. Χρωματίζουμε το τετράγωνο στις μια σκακιέρα. Εάν μια τέτοια διάταξη από $T -$ τετρόμινα είναι εφικτή, κάποια από τα $T -$ τετρόμινα θα καλύψουν 1 μαύρο και 3

άσπρα τετράγωνα, ενώ τα υπόλοιπα θα καλύψουν 1 άσπρο και 3 μαύρα. Στις το συνολικό πλήθος άσπρων τετραγώνων είναι ίσο με των μαύρων. Συνεπώς πρέπει να έχουμε έναν άρτιο αριθμό από T –τετρόμινα. Άτοπο.

Λύση του προβλήματος D13.

Ονομάζουμε *ανάποδο* οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών στη δεδομένη ακολουθία, εάν ο μεγαλύτερος από στις δύο αριθμούς βρίσκεται αριστερά του μικρότερου. Εάν ανταλλάξουμε αμοιβαία δύο γειτονικούς αριθμούς, αλλάζουμε το πλήθος των ανάποδων ζευγών κατά ένα. Κατά συνέπεια μετά από έναν περιττό αριθμό κινήσεων το πλήθος των ανάποδων ζευγών δεν μπορεί να είναι ίσο με το πλήθος των ζευγών στην αρχική ακολουθία. Επομένως δεν είναι δυνατό να ληφθεί η φυσική διάταξη.

Λύση του προβλήματος D14.

Στις αναφέραμε στο προηγούμενο πρόβλημα, εάν ανταλλάσσουμε αμοιβαία δύο γειτονικούς αριθμούς, αλλάζουμε το πλήθος των ανάποδων ζευγών κατά ένα. Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου ανταλλάσσουμε δύο μη γειτονικούς αριθμούς: έστω ότι υπάρχουν m άλλοι αριθμοί μεταξύ στις. Η ανταλλαγή αυτών των δύο αριθμών μπορεί στις να πραγματοποιηθεί από $m + 1$ στις ανταλλαγές από στις οποίες ο αριστερός αριθμός κινείται στις τον δεξιό μέχρι να τον προσπεράσει, και έπειτα από m ανταλλαγές όπου ο αρχικά δεξιός αριθμός κινείται στις το αριστερό, έως ότου καταλάβει τη θέση του αρχικά αριστερού αριθμού. Κατά συνέπεια μετά από κάθε τέτοια κίνηση το πλήθος των ανάποδων ζευγών αλλάζει κατά έναν περιττό αριθμό. Έτσι μετά από ένα περιττό πλήθος κινήσεων το πλήθος των ανάποδων ζευγών θα είναι διαφορετικός από το πλήθος των ανάποδων ζευγών στην αρχική ακολουθία και άρα είναι αδύνατο να καταλήξουμε την φυσική διάταξη των αριθμών.

Λύση του προβλήματος D15.

Απαριθμούμε τα τετράγωνα ως 1, 2, ... , 16 έτσι ώστε διαδοχικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε γειτονικά τετράγωνα (π.χ. η πρώτη γραμμή να πηγαίνει από αριστερά στις τα δεξιά, έπειτα η δεύτερη από δεξιά στις τα αριστερά, και ούτω καθ' εξής):

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

Δίνουμε και στα τετράγωνα και στα νομίσματα στις αριθμούς που τα προσδιορίζουν. Ειδικότερα, μπορούμε να αναφερθούμε στα τετράγωνα και τα νομίσματα με τη χρήση των αριθμών στις: «το νόμισμα 2», «το τετράγωνο 5», κ.λπ. Στις θεωρήσουμε ένα ζεύγος νομισμάτων με αριθμούς m και n , αντίστοιχα. Ένα τέτοιο ζεύγος θα δηλωθεί με το σύμβολο $\{m,n\}$. Καλούμε *ανάποδο* ένα ζεύγος νομισμάτων $\{m,n\}$ εάν το νόμισμα με το μεγαλύτερο αριθμό είναι σε τετράγωνο με μικρότερο αριθμό. Π.χ. εάν τα νομίσματα 1, 2, 3 είναι στα τετράγωνα 1, 3, 2, αντίστοιχα, τότε το ζεύγος $\{2,3\}$ είναι ανάποδο, ενώ τα $\{1,2\}$ και $\{1,3\}$ δεν είναι. Συμβολίζουμε με $S(k)$ το συνολικό πλήθος ανάποδων ζευγών νομισμάτων μετά από k κινήσεις.

Σημειώστε ότι στην ανωτέρω αρίθμηση, κάθε περιττό τετράγωνο είναι γειτονικό μόνο σε άρτια τετράγωνα και αντίστροφα. Επομένως, εάν μετακινήσουμε ένα νόμισμα, τότε καταλήγει σε τετράγωνο με αντίθετο ισοϋπόλοιπο. Στις, κατά την μετακίνηση περνά ένα άρτιο πλήθος (ενδεχομένως 0) άλλων νομισμάτων. Παραδείγματος χάριν, εάν το νόμισμα 1 είναι στο τετράγωνο 1 και το τετράγωνο 8 είναι κενό, μπορούμε να κινήσουμε το νόμισμα 1 στις το τετράγωνο 8. Από την άποψη των αριθμών των τετραγώνων περνάμε έξι τετράγωνα (με τα νομίσματα σε στις), συγκεκριμένα τα τετράγωνα 2, 3, 4, 5, 6 και 7.

Στις μεταθέσουμε αμοιβαία δύο νομίσματα σε τετράγωνα με διαδοχικούς αριθμούς (θα το καλέσουμε αυτό *ανταλλαγή*). Προσοχή στις, η ανταλλαγή δεν είναι νόμιμη κίνηση στο παιχνίδι, αλλά στις φανταστούμε ότι είναι). Σε αυτή την περίπτωση το $S(\cdot)$ θα αλλαχτεί κατά μία μονάδα. Αυτό συμβαίνει επειδή, εάν το ζεύγος ήταν ανάποδο, τώρα παύει να είναι και, αντίστροφα, αν δεν ήταν ανάποδο, τώρα θα γίνει. Σημειώστε ότι η μετάθεση αυτή δεν έχει επιπτώσεις στα άλλα ζεύγη (εκείνα που είναι ανάποδα, παραμένουν έτσι, και δεν προκύπτει κανένα νέο ζευγάρι).

Μια νόμιμη κίνηση είναι ισοδύναμη με ένα άρτιο πλήθος ανταλλαγών. Συνεπώς το $S(\cdot)$ θα αλλάξει κατά έναν άρτιο αριθμό (ενδεχομένως 0). Κατά συνέπεια το ισοϋπόλοιπο του $S(\cdot)$ μένει αναλλοίωτο.

Υποθέστε ότι έχουμε αναδιατάξει τα νομίσματα (στη διάταξη που απαιτείται) κάνοντας z κινήσεις. Τα 15 νομίσματα συνολικά διαμορφώνουν 105 ζεύγη (ελέγξτε το αυτό!). Ένα ζεύγος νομισμάτων σε δύο τετράγωνα είναι ανάποδο στη τελική διάταξη εάν και μόνο εάν το ζεύγος των νομισμάτων στα ίδια δύο τετράγωνα δεν είναι ανάποδο στην αρχική διάταξη. Κατά συνέπεια $S(z) = 105 - S(0)$, που έρχεται σε αντίθεση με την ισότητα των ισοϋπολοίπων του $S(z)$ και του $S(0)$. Έτσι είναι αδύνατο να αναδιαταχθούν τα νομίσματα με τον ζητούμενο τρόπο.

Λύση του προβλήματος D16.

Η λύση είναι παρόμοια με τη λύση του προηγούμενου προβλήματος. Απαριθμούμε τα τετράγωνα ως εξής (διαδοχικοί αριθμοί είναι σε γειτονικά τετράγωνα):

1	2	3
6	5	4
7	8	9
ανώτερο επίπεδο		

18	17	16
13	14	15
12	11	10
μέσο επίπεδο		

19	20	21
24	23	22
25	26	27
κατώτερο επίπεδο		

Σημειώστε ότι κάθε τετράγωνο γεινιάζει μόνο με τετράγωνα διαφορετικού ισοϋπολοίπου. Στις στο προηγούμενο πρόβλημα, καλούμε *ανάποδο* το ζεύγος των κύβων $\{m, n\}$ εάν ο κύβος με το μεγαλύτερο αριθμό είναι σε θέση με μικρότερο αριθμό. Συμβολίζουμε με $S(k)$ το συνολικό πλήθος ανάποδων ζευγών κύβων μετά από k κινήσεις. Στις κύβους που μετακινείται πάντα καταλήγει σε τετράγωνο με διαφορετικό ισοϋπόλοιπο.

Ας μεταθέσουμε αμοιβαία δύο κύβους με διαδοχικούς αριθμούς (θα το καλέσουμε αυτό *ανταλλαγή*). Προσοχή στις, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, η ανταλλαγή δεν είναι νόμιμη κίνηση στο παιχνίδι, αλλά στις φανταστούμε ότι είναι).

Σε αυτή την περίπτωση το $S(\cdot)$ θα αλλαχτεί κατά μία μονάδα. Αυτό συμβαίνει επειδή, εάν το ζεύγος ήταν ανάποδο, τώρα παύει να είναι και, αντίστροφα, αν δεν ήταν ανάποδο, τώρα θα γίνει. Σημειώστε ότι η μετάθεση αυτή δεν έχει επιπτώσεις στα άλλα ζεύγη (εκείνα που είναι ανάποδα, παραμένουν έτσι, και δεν προκύπτει κανένα νέο ζευγάρι).

Μια νόμιμη κίνηση είναι ισοδύναμη με ένα άρτιο πλήθος ανταλλαγών. Συνεπώς το $S(\cdot)$ θα αλλάξει κατά έναν άρτιο αριθμό (ενδεχομένως 0). Κατά συνέπεια το ισοϋπόλοιπο του $S(\cdot)$ μένει αναλλοίωτο.

Υποθέστε ότι έχουμε αναδιατάξει τους κύβους (στη διάταξη που απαιτείται) κάνοντας z κινήσεις. Οι 26 κύβοι συνολικά διαμορφώνουν 325 ζευγάρια (ελέγξτε το αυτό!). Ένα ζεύγος κύβων σε δύο τετράγωνα είναι ανάποδο στη τελική διάταξη εάν και μόνο εάν το ζεύγος των κύβων στις ίδιες δύο θέσεις δεν είναι ανάποδο στην αρχική διάταξη. Κατά συνέπεια $S(z) = 325 - S(0)$, που έρχεται σε αντίθεση με την ισότητα των ισοϋπολοίπων του $S(z)$ και του $S(0)$. Έτσι είναι αδύνατο να αναδιαταχθούν οι κύβοι με τον ζητούμενο τρόπο.

Λύση του προβλήματος D17.

Αριθμούμε τα τετράγωνα του πίνακα με στις ακόλουθους δύο τρόπους:

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1

Και στις δύο περιπτώσεις τα τετράγωνα με «1» είναι 17, ενώ τα «2»s και τα «3»s είναι 16. Δεδομένου ότι κάθε ορθογώνιο καλύπτει τρεις διαφορετικούς αριθμούς, ο κενός τομέας πρέπει να έχει «1» και στις δύο πίνακες. Υπάρχουν εννέα τέτοια τετράγωνα: στις στο κέντρο, τέσσερα δίπλα στη μέση των πλευρών και τέσσερα στις γωνίες. Για κάθε ένα από αυτά τα τετράγωνα είναι εύκολο να βρεθεί μια κάλυψη που το αφήνει κενό.

Λύση του προβλήματος D18.

Δείτε τη λύση του προβλήματος A8.

Λύση του προβλήματος D19.

Απαριθμούμε τις γραμμές από κάτω προς τα πάνω και τις στήλες από αριστερά προς τα δεξιά με τους αριθμούς 1, 2, ... , 8. Ο Jerry μπορεί να κερδίσει με την ακόλουθη στρατηγική: αφήνει πάντα τον βασιλιά σε μια θέση με δύο άρτιες συντεταγμένες. Μετά από μια τέτοια κίνηση ο Tom δεν μπορεί να κινήσει το βασιλιά προς τη πάνω δεξιά γωνία, έτσι ο Jerry δεν μπορεί να χάσει. Κάθε δυνατή κίνηση του Tom επιτρέπει στο Jerry να ακολουθήσει την στρατηγική του. Όταν το παιχνίδι τελειώσει, νικητής θα είναι πάντα ο Jerry.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ

Svetoslav Bilchev, Emiliya Velikova

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε ορισμένα παιχνίδια στρατηγικής. Πρόκειται για παιχνίδια δύο παικτών, όπου ο ένας από τους δύο μπορεί να εξασφαλίσει την νίκη του παίζοντας σωστά. Στην κάθε περίπτωση ο αναγνώστης προσκαλείται να ανακαλύψει την νικηφόρα στρατηγική. Είδαμε μερικά τέτοια παραδείγματα στο κεφάλαιο των Αναλλοίωτων.

§1. Παιχνίδια φάρσες

Στα ακόλουθα *μαθηματικά παιχνίδια – παιχνίδια φάρσες* το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από τους αρχικούς όρους του παιχνιδιού και όχι από τις στρατηγικές των παικτών. Δηλαδή, το αποτέλεσμα είναι προδιαγεγραμμένο *ότι και αν κάνουν οι παίκτες*.

1.1. Πρόβλημα. Δύο παίκτες κόβουν διαδοχικά μια σοκολάτα διαστάσεων $m \times n$. Σε κάθε κίνηση οι παίκτες μπορούν κόβουν την σοκολάτα μόνο κατά μήκος των γραμμών που χωρίζουν τα πλακάκια της. Χάνει ο παίκτης που δεν μπορεί να κάνει άλλη κίνηση.

Λύση. Το κύριο σημείο εδώ είναι ότι με κάθε κίνηση ο αριθμός των κομματιών αυξάνεται κατά ένα. Στην αρχή έχουμε μόνο ένα κομμάτι σοκολάτας. Αλλά στο τέλος πρέπει να λάβουμε τα $m \cdot n$ μικρά ορθογώνια κομμάτια (τα πλακάκια). Άρα το παιχνίδι θα συνεχίσει ακριβώς για $mn - 1$ κινήσεις. Εάν η τελευταία κίνηση είναι άρτιος αριθμός, δηλαδή αν ο $m \cdot n$ είναι περιττός, νικητής θα είναι ο δεύτερος παίκτης. Εάν $m \cdot n$ είναι άρτιος, νικητής θα είναι ο πρώτος παίκτης.

1.2. Πρόβλημα. Γράφουμε τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, 100$ στον πίνακα. Δύο παίκτες σβήνουν διαδοχικά οποιουδήποτε δύο αριθμούς a και b , και αμέσως μετά γράφουν στον πίνακα τον αριθμό $a + b - 1$. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μείνει μόνο ένας αριθμός στον πίνακα. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης εάν ο τελευταίος αριθμός είναι άρτιος, αλλιώς κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.

Λύση. Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι ο συνολικός αριθμός κινήσεων είναι 99 και σε κάθε κίνηση μειώνεται κατά 1 το άθροισμα όλων των αριθμών. Στην αρχή του παιχνιδιού το άθροισμα όλων των αριθμών είναι $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$, ο οποίος είναι άρτιος. Συνεπώς στο τέλος του παιχνιδιού ο αριθμός που παραμένει, δηλαδή ο $5050 - 99 = 4951$, είναι περιττός. Άρα ο δεύτερος παίκτης είναι πάντα ο νικητής, ότι και αν κάνει ο πρώτος.

1.3. Πρόβλημα. Γράφουμε τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, 2005$ στον πίνακα. Δύο παίκτες σβήνουν διαδοχικά οποιουδήποτε δύο αριθμούς a και b , και αμέσως μετά γράφουν στον πίνακα τον αριθμό $|a - b|$. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μείνει μόνο ένας αριθμός στον πίνακα. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης εάν ο τελευταίος αριθμός είναι άρτιος, αλλιώς κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.

Λύση. Στην αρχή του παιχνιδιού το άθροισμα όλων των αριθμών στον πίνακα, $1 + 2 + 3 + \dots + 2005 = 1003 \cdot 2005$, είναι περιττός αριθμός. Είναι εύκολο

να διαπιστώσει κανείς ότι μετά από κάθε κίνηση το αντίστοιχο άθροισμα παραμένει περιττός αριθμός (εξετάστε δύο περιπτώσεις - όταν a και b έχει το ίδιο ισού υπόλοιπο ή διαφορετικό ισού υπόλοιπο). Συνεπώς, ο τελευταίος αριθμός που θα παραμείνει είναι περιττός και πάντα κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.

1.4. Πρόβλημα. Δύο παίκτες παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Η πρώτη κίνηση του πρώτου παίκτη είναι να χωρίσει έναν σωρό 15 πετρών σε δύο σωρούς. Κατόπιν καταγράφει το γινόμενο των αριθμών των πετρών στις δύο σωρούς που δημιουργήθηκαν. Μετά, ο δεύτερος παίκτη χωρίζει στα δύο έναν από τους δύο σωρούς δημιουργώντας τρεις, και καταγράφει το γινόμενο των αριθμών των πετρών στις τρεις σωρούς. Συνεχίζεται εναλλάξ η ίδια διαδικασία έως ότου δημιουργηθούν 15 σωροί μιας πέτρας.

i) Έστω A_k το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών των πετρών σε κάθε σωρό όταν οι πέτρες έχουν διαιρεθεί σε k σωρούς. Αποδείξτε ότι $A_k > A_{k+1}$.

ii) Στο τέλος υπολογίζεται το άθροισμα S των γινομένων που καταγράφηκαν παραπάνω. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης εάν το S είναι άρτιος αριθμός, αλλιώς κερδίζει ο δεύτερος.

Λύση. i) Έστω ότι στο k -βήμα ένας σωρός από $x + y$ πέτρες διαιρείται σε δύο σωρούς από x και y πέτρες αντίστοιχα. Τότε

$$A_k - A_{k+1} = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2xy > 0 \text{ δηλ. } A_k > A_{k+1}$$

ii) Έχουμε ήδη δει ότι μετά από κάθε κίνηση αριθμός A_k μειώνεται κατά το διπλάσιο γινόμενο του πλήθους των πετρών στους δύο νέους σωρούς. Άρα το τελικό άθροισμα είναι

$$S = \frac{1}{2}(A_1 - A_k) = \frac{1}{2}[15^2 - (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)] = \frac{1}{2}(15^2 - 15) = 105,$$

δηλ. το άθροισμα S είναι πάντα ίσο με τη σταθερά 105. Συνεπώς ο δεύτερος παίκτης είναι πάντα νικητής ανεξάρτητα από την πρώτη κίνηση του πρώτου παίκτη και τον επακόλουθο τρόπο διαίρεσης των σωρών.

§2. Συμμετρία

Εδώ εξετάζουμε μαθηματικά παιχνίδια στα οποία ο νικητής χρησιμοποιεί ουσιαστικά την ιδέα της συμμετρίας.

2.1. Πρόβλημα. Το παιχνίδι παίζεται σε ένα ορθογώνιο ταμπλώ διαστάσεων $(2 \times n)$, το οποίο διαιρείται σε (1×1) τετράγωνα, όπου n φυσικός αριθμός. Δύο παίκτες χρωματίζουν εναλλάξ είτε ένα άβαφο ακόμη τετράγωνο ή δύο γειτονικά (οριζοντίως ή καθεώς) άβαφα ακόμη τετράγωνα. Χάνει ο παίκτης που δεν έχει άλλες κινήσεις.

Λύση. Εάν το n είναι περιττός αριθμός, νικητής είναι ο πρώτος παίκτης - η πρώτη του κίνηση είναι να χρωματίσει τα δύο κεντρικά τετράγωνα διαιρώντας το ταμπλώ σε δύο ίσα μέρη. Μετά από αυτό κάνει τις συμμετρικές κινήσεις των κινήσεων του δεύτερου παίκτη.

Εάν το n είναι άρτιος αριθμός, νικητής είναι ο δεύτερος παίκτης - πρέπει να κάνει τις συμμετρικές (ως προς το κέντρο του ταμπλώ) κινήσεις των κινήσεων του πρώτου παίκτη.

2.2. Πρόβλημα. Δύο παίκτες χρωματίζουν διαδοχικά είτε ένα ορθογώνιο διαστάσεων (1×2) ή τετράγωνο διαστάσεων (1×1) ή, τέλος, τετράγωνο διαστάσεων (2×2) στο εσωτερικό ενός μεγάλου τετραγώνου διαστάσεων (10×10) . Δεν επιτρέπεται η βαφή ενός ήδη χρωματισμένου χωρίου. Νικητής είναι ο παίκτης που θα χρωματίζει το τελευταίο χωρίο του μεγάλου τετραγώνου.

Λύση. Νικητής θα είναι ο πρώτος παίκτης αν ακολουθήσει την εξής στρατηγική: Η πρώτη κίνησή του είναι να βάψει το (2×2) τετράγωνο στο κέντρο του μεγάλου τετραγώνου. Μετά από αυτό επαναλαμβάνει συμμετρικά κάθε κίνηση του δεύτερου παίκτη.

2.3. Πρόβλημα. Δύο παίκτες κάνουν διαδοχικά κινήσεις πάνω σε ένα ορθογώνιο φύλλο χαρτιού διαστάσεων (11×100) . Μία κίνηση συνίσταται στο να χρωματιστεί ένα ή περισσότερα κελιά που σχηματίζουν τετράγωνο. Δεν επιτρέπεται η βαφή ήδη χρωματισμένου χωρίου. Χάνει ο παίκτης που δεν έχει περαιτέρω κίνηση.

Λύση. Ο νικητής είναι ο πρώτος παίκτης εάν χρησιμοποιήσει την ακόλουθη συμμετρική στρατηγική: Χρωματίζει το (10×10) τετράγωνο που στο κέντρο του αρχικού ορθογώνιου. Μετά ακολουθεί συμμετρικά τις κινήσεις του άλλου. Η συμμετρική στρατηγική του παιχνιδιού έχει όχι υποχρεωτικός κάποια γεωμετρική μεταλλεία.

2.4. Πρόβλημα. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων

i) $4 \times 4 \times 4$

ii) $4 \times 4 \times 3$

iii) $4 \times 3 \times 3$

το οποίο αποτελείται από μοναδιαίους κύβους. Καθένας από δύο παίκτες, εναλλάξ, μπορεί να κάνει μια τρύπα με μια βελόνα σε μια γραμμή μοναδιαίων κύβων εάν σε αυτή την γραμμή υπάρχει τουλάχιστον ένας κύβος χωρίς οποιαδήποτε τρύπα. Χάνει ο παίκτης που δεν έχει άλλη κίνηση.

Λύση. Στις περιπτώσεις i) και ii) νικητής είναι ο δεύτερος παίκτης αν ακολουθήσει κεντρική συμμετρία. Στην τρίτη περίπτωση νικητής είναι ο πρώτος παίκτης αν κάνει μια τρύπα στη γραμμή με τους κεντρικούς κύβους των τεσσάρων 3×3 στρωμάτων, και μετά ακολουθήσει κεντρική συμμετρία.

2.5. Πρόβλημα. Δίνεται κυρτό n -γωνο. Δύο παίκτες διαδοχικά χαράσσουν μια διαγώνιο του n -γωνο, αρκεί αυτή να μη έχει σχεδιαστεί προηγουμένως. Δεν επιτρέπεται η νέα διαγώνιος να έχει κοινά σημεία με μία ήδη χαραγμένη. Χάνει ο παίκτης που δεν έχει άλλη κίνηση.

Λύση. Νικά ο πρώτος παίκτης εάν ο n είναι ένας άρτιος αριθμός - η πρώτη κίνησή του είναι να συνδέσει δύο αντικείμενες κορυφές του n -γώνου, αφήνοντας ίσο πλήθος κορυφών εκατέρωθεν. Κατόπιν ο πρώτος παίκτης κάνει συμμετρικές κινήσεις εν σχέση με τον δεύτερο. Συγκεκριμένα, σε κάθε κίνηση του δεύτερου παίκτη σε ένα και από τα δύο μέρη απαντά με την ίδια κίνηση στο άλλο μέρος.

Όταν ο n είναι περιττός, οι συντάκτες του άρθρου δεν γνωρίζουν την πλήρη λύση στο πρόβλημα.

2.6. Πρόβλημα. Δύο παίκτες τοποθετούν εναλλάξ ίππους σε μία σκακιέρα. Δεν επιτρέπεται να βάλουν κανένα ίππο σε τετράγωνο που απειλείται από ήδη

τοποθετημένο ίππο (ο οποίος θεωρείται ότι απειλεί με τον ίδιο τρόπο όπως στο συνηθισμένο σκάκι). Χαμένος είναι ο παίκτης που δεν έχει τη δυνατότητα να βάλει άλλον ίππο στη σκακιέρα. Ποιος είναι ο νικητής εάν παίξει σωστά;

Υπόδειξη. Ο δεύτερος παίκτης μπορεί να εξασφαλίσει νίκη αν κάνει χρήση της συμμετρικής ως προς τη διαγώνιο (ή το κέντρο) στρατηγικής.

2.7. Πρόβλημα. Δύο παίκτες τοποθετούν εναλλάξ προβολείς στα τετράγωνα μιας «σκακιέρας» διαστάσεων i) $k \times k$, ii) $2 \times k$. Κάθε προβολέας φωτίζει όλα τα τετράγωνα που δεν είναι αριστερά του ή ψηλότερα. Σε κάθε κίνηση είναι απαραίτητο να φωτιστεί τουλάχιστον ένα νέο τετράγωνο. Χάνει ο παίκτης που θα αναγκαστεί να βάλει προβολέα στην επάνω αριστερή γωνία της σκακιέρας. Ποιος από τους παίκτες μπορεί να εξασφαλίσει την νίκη του και πώς;

Απάντηση. i) Ο πρώτος παίκτης μπορεί πάντα να νικήσει. Η πρώτη κίνησή του είναι να φωτίσει το μέγιστο τετράγωνο που χωράει στην σκακιέρα και δεν περιέχει το πάνω αριστερά τετράγωνο. Μετά ακολουθεί συμμετρικά τις κινήσεις του άλλου. ii) Ο πρώτος παίκτης μπορεί πάντα να νικήσει. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Η πρώτη κίνησή του είναι στο κάτω δεξιά τετράγωνο. Μετά από αυτό ο πρώτος παίκτης φροντίζει με κάθε κίνησή του να αποκαταστήσει το αφώτιστο τμήμα ώστε να γίνει πάλι ορθογωνίου σχήματος αλλά χωρίς κάτω δεξιά γωνιακό τετράγωνο.

§3. Minimax

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε τα παιχνίδια στα οποία το κέρδος κάθε παίκτη είναι μεταβλητό, με τιμές που εξαρτώνται από τις κινήσεις των παικτών, και ο στόχος κάθε παίκτη είναι να αυξήσει το κέρδος του.

Τα παιχνίδια θα είναι με δύο παίκτες και το άθροισμα των κερδών τους θα είναι σταθερός αριθμός, ανεξάρτητος από το πόσα κερδίζει ο καθένας χωριστά. Τα συμφέροντα των παικτών συγκρούονται επειδή όσο αυξάνεται το κέρδος του ενός τόσο μειώνεται το κέρδος του δεύτερου. Ας αρχίσουμε με ένα πολύ απλό παράδειγμα.

3.1. Πρόβλημα. Ένα αγόρι και ένα κορίτσι μοιράζουν μεταξύ τους 10 σοκολάτες ακολουθώντας την εξής διαδικασία: το αγόρι μοιράζει τις σοκολάτες στα δύο και το κορίτσι παίρνει ένα από τα δύο μερίδια. Πόσες σοκολάτες είναι δυνατόν πάρει το αγόρι και πόσες το κορίτσι;

Λύση. Ο καθένας θα πάρει ακριβώς 5 σοκολάτες. Πραγματικά, το αγόρι δεν θα διαιρέσει τις σοκολάτες με διαφορετικό τρόπο για να μην δώσει την δυνατότητα στο κορίτσι να πάρει το μεγαλύτερο μερίδιο. Με άλλα λόγια το αγόρι κάνει όσο γίνεται μικρότερο το μέγιστο δυνατό κέρδος του κοριτσιού. Τέτοιου είδους στρατηγική ονομάζεται "minimax" στρατηγική.

3.2. Πρόβλημα. Η Αλίκη και ο Βασίλης διαιρούν 10 χρυσά νομίσματα με τον ακόλουθο τρόπο. Το Βασίλης διαιρεί τα νομίσματα σε δύο μερίδια. Κάθε μερίδιο αποτελείται τουλάχιστον δύο νομίσματα. Κατόπιν η Αλίκη διαιρεί το κάθε ένα από τα δύο μερίδια σε δύο μικρότερα. Στο τέλος Αλίκη παίρνει το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα τέσσερα μερίδια, ενώ ο Βασίλης τα υπόλοιπα. Πόσα νομίσματα πάρει η Αλίκη και πόσα ο Βασίλης;

Λύση. Έστω ότι ο Βασίλης διαιρεί τα νομίσματα σε δύο μερίδια με a και b νομίσματα, αντίστοιχα, όπου $a \leq b$. Η Αλίκη μπορεί να διαιρέσει το πρώτο μερίδιο

σε δύο, παραδείγματος χάριν, ίσα μέρη και το δεύτερο σε δύο μέρη με 1 και $b - 1$ νομίσματα. Κατά συνέπεια Αλίκη θα πάρει τουλάχιστον b νομίσματα. Αλλά $b \geq a$, $a + b = 10$ οπότε $b \geq 5$. Έτσι η Αλίκη θα πάρει τουλάχιστον 5 νομίσματα. Εάν Βασίλης διαιρέσει τα νομίσματα σε δύο ίσα μέρη, η Αλίκη θα πάρει ακριβώς 5 νομίσματα ανεξάρτητα από τις κινήσεις της. Έτσι ο καθένας θα πάρει ακριβώς 5 νομίσματα.

3.3. Πρόβλημα. Γράφουμε τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, 100, 101$ στον πίνακα. Καθένας από δύο παίκτες σβήνουν εναλλάξ οποιοδήποτε υποσύνολο εννέα αριθμών από τον πίνακα. Μετά από 11 τέτοια σβήσιματα θα παραμείνουν μόνο δύο αριθμοί στον πίνακα. Το κέρδος του πρώτου παίκτη είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ των δύο αυτών αριθμών. Αποδείξτε ότι ο πρώτος παίκτης μπορεί να εξασφαλίσει κέρδος τουλάχιστον 55 ανεξάρτητα από τις κινήσεις του δεύτερου παίκτη.

Λύση. Η πρώτη κίνηση του πρώτου παίκτη είναι να σβήσει τους εννέα αριθμούς μεταξύ 47 και 55. Έτσι παραμένουν αριθμοί οι οποίοι διαιρούνται σε δύο ομάδες: από 1 έως 46 και από 56 μέχρι 101. Κατόπιν εάν ο δεύτερος παίκτης σβήσει τον αριθμό k , ο πρώτος παίκτης φροντίζει να σβήσει τον αριθμό $|55 - k|$. Συνεπώς, η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ των δύο τελευταίων αριθμών είναι ίση με 55.

§4. Θεωρία Αριθμών

4.1. Πρόβλημα. Δίνονται οι 14 αριθμοί $1, 2, 3, \dots, 9, -7, -8, -9, -10, -11$.

Δύο παίκτες επιλέγουν εναλλάξ έναν από τους αριθμούς. Στο τέλος κάθε παίκτης προσθέτει τους αριθμούς του. Νικητής είναι εκείνος ο παίκτης που έχει το άθροισμα με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Ποιος από τους δύο παίκτες έχει νικηφόρα στρατηγική;

Λύση. Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + (-7) + (-8) + (-9) + (-10) + (-11) = 0.$$

Συνεπώς τα αθροίσματα των δύο παικτών θα είναι αντίθετοι ακέραιοι, με ίσες απόλυτες τιμές ανεξάρτητα από την εκάστοτε επιλογή των αριθμών. Επομένως, το συγκεκριμένο παιχνίδι δεν έχει νικητή.

4.2. Πρόβλημα. Το παιχνίδι ξεκινά από τον αριθμό 60. Δύο παίκτες εναλλάξ αφαιρούν από τον εκάστοτε αριθμό έναν από τους θετικούς διαιρέτες του. Χάνει ο παίκτης που γράψει μηδέν.

Λύση. Ο πρώτος παίκτης έχει νικηφόρα στρατηγική. Πρώτα πρέπει να αφαιρέσει από τον αριθμό 60 έναν από τους πρώτους διαιρέτες του. Έτσι παραμένει ένας περιττός αριθμός. Επομένως ο δεύτερος παίκτης είναι υποχρεωμένος να μειώσει αυτόν τον αριθμό κατά έναν περιττό αριθμό. Θα μείνει πάλι ένας άρτιος αριθμός. Συνεπώς ο πρώτος παίκτης μπορεί πάλι να μειώσει τον αριθμό κατά κάποιον από τους περιττούς διαιρέτες του (παραδείγματος χάριν τον 1) και ούτω καθ' εξής...

4.3. Πρόβλημα. Δύο παίκτες γράφουν διαδοχικά, από αριστερά προς τα δεξιά, ένα ένα τα ψηφία ενός εξαψήφιου αριθμού. Εάν ο αριθμός που θα προκύψει είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε κερδίζει ο δεύτερος παίκτης, αλλιώς ο πρώτος. Ποιος παίκτης έχει νικηφόρα στρατηγική;

Λύση. Ο δεύτερος παίκτης ακολουθεί την εξής τακτική:

αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 1 εκείνος απαντά με το ψηφίο 4,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 2 εκείνος απαντά με το ψηφίο 1,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 3 εκείνος απαντά με το ψηφίο 5,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 4 εκείνος απαντά με το ψηφίο 2,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 5 εκείνος απαντά με το ψηφίο 6,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 6 εκείνος απαντά με το ψηφίο 3,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 7 εκείνος απαντά με το ψηφίο 0,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 8 εκείνος απαντά με το ψηφίο 4,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 9 εκείνος απαντά με το ψηφίο 1,
 αν ο πρώτος παίκτης γράψει το ψηφίο 0 εκείνος απαντά με το ψηφίο 0,

Στο τέλος ο αριθμός που θα προκύψει είναι της μορφής $A = \overline{abcdef}$, όπου οι αριθμοί $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ είναι πολλαπλάσια του 7. Κατά συνέπεια ο A είναι επίσης πολλαπλάσιο του 7. Άρα ο δεύτερος παίκτης είναι ο νικητής.

4.4. Πρόβλημα. Δύο παίκτες γράφουν διαδοχικά, από αριστερά προς τα δεξιά, ένα ένα τα ψηφία ενός αριθμού με k ψηφία. Εάν ο αριθμός που θα προκύψει είναι πολλαπλάσιο του 11, τότε κερδίζει ο δεύτερος παίκτης, αλλιώς ο πρώτος. Ποιος παίκτης έχει νικηφόρα στρατηγική; Εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις: i) k - άρτιος αριθμός ii) k - περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Λύση. i) Ο δεύτερος παίκτης επαναλαμβάνει τα ψηφία που έγραψε ο πρώτος. Ο αριθμός που προκύπτει είναι της μορφής $A = \overline{aabbcc\dots ff}$, ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 11. Νικητής είναι ο δεύτερος παίκτης. ii) Νικητής είναι πάλι ο δεύτερος παίκτης επειδή έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει την ίδια στρατηγική με πριν. Ο αριθμός που θα προκύψει είναι τώρα της μορφής $A = \overline{aabbcc\dots ffg}$. Ο A δεν είναι ποτέ πολλαπλάσιο του 11 όποια και αν είναι η επιλογή του τελευταίου ψηφίου g από τον πρώτο παίκτη.

4.5. Πρόβλημα. Γράφουμε σε μία γραμμή $2n$ ψηφία $1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2$. Δύο παίκτες τοποθετούν εναλλάξ το σύμβολο "+" ή το "." σε όποια θέση επιθυμούν, μεταξύ οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών ψηφίων. Μετά από $2n - 1$ τέτοιες επαναλήψεις, υπολογίζεται η αριθμητική τιμή της παράστασης που προκύπτει (οι πράξεις γίνονται ως συνήθως: πρώτα όλα τα γινόμενα και μετά όλες οι προσθέσεις). Κερδίζει ο πρώτος παίκτης εάν το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός, αλλιώς κερδίζει ο δεύτερος.

Λύση. Ο πρώτος παίκτης έχει νικηφόρα στρατηγική. Η πρώτη κίνησή του είναι να βάλει το σύμβολο "." μπροστά από το τελευταίο ψηφίο 2 στη γραμμή. Τώρα, κάθε ένα από τα υπόλοιπα ψηφία 2 έχει δύο ελεύθερες θέσεις για τα σύμβολα (αριστερά και δεξιά). Μετά ο πρώτος παίκτης τοποθετεί το σύμβολο "." είτε από την δεξιά πλευρά είτε από την αριστερή πλευρά, όποια είναι ελεύθερη, καθενός από τα ψηφία 2 της σειράς. Αυτό είναι πάντα δυνατό επειδή ο δεύτερος παίκτης τοποθετεί κάποιο σύμβολο είτε αριστερά είτε δεξιά κάποιου ψηφίου 2, οπότε ο πρώτος παίκτης βάζει το σύμβολο "." από την άλλη πλευρά του ίδιου ψηφίου 2. Στο τέλος μαζί με κάθε ψηφίο 2 θα υπάρχει το σύμβολο ".". Κατά συνέπεια η πρόσθεση που προκύπτει είναι πρόσθεση μόνο άρτιων αριθμών και η παράσταση θα είναι άρτιος αριθμός.

4.6. Πρόβλημα. Δύο παίκτες γράφουν εναλλάξ, από αριστερά προς τα δεξιά, ένα ένα τα ψηφία ενός αριθμού k - ψηφίων. Νικητής αναδεικνύεται ο πρώτος παίκτης

εάν ο αριθμός που θα προκύψει δεν είναι πολλαπλάσιο του 9. Αλλιώς νικητής είναι ο δεύτερος παίκτης.

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού δια 9 είναι το ίδιο με το υπόλοιπο της διαίρεσης δια 9 του αθροίσματος των ψηφίων του.

Εάν το k είναι άρτιος αριθμός κερδίζει ο δεύτερος παίκτης - για τον σκοπό αυτό τοποθετεί ως τελευταίο ψηφίο (η τελευταία κίνηση είναι δική του) τον αριθμό που λείπει ώστε το άθροισμα των πρώτων $k - 1$ ψηφίων να γίνει πολλαπλάσιο του 9. Έτσι ο αριθμός που θα προκύψει είναι επίσης πολλαπλάσιο του 9. Εάν το k είναι περιττός αριθμός, τότε κερδίζει ο πρώτος παίκτης επειδή η τελευταία κίνησή του μπορεί να είναι τέτοιο ψηφίο ώστε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που θα προκύψει να μην είναι πολλαπλάσιο του 9.

4.7. Πρόβλημα. Γράφουμε σε μια σειρά τα n ψηφία: $1, 1, 1, \dots, 1$. Δύο παίκτες τοποθετούν διαδοχικά τα σύμβολα "+" ή ".", σε όποια θέση επιθυμούν, μεταξύ οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών ψηφίων. Μετά από την τοποθέτηση και των $n - 1$ συμβόλων, υπολογίζεται η αριθμητική τιμή της παράστασης που προκύπτει. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης εάν η αριθμητική αυτή τιμή είναι άρτιος αριθμός, αλλιώς κερδίζει ο δεύτερος.

Υπόδειξη. Δείτε τη λύση του προβλήματος 4.5.

ΑΡΧΗ ΤΟΥ DIRICHLET

Sava Grozdev

Εάν βάλει κανείς 3 βόλους στις 2 τσέπες του παντελονιού του θα διαπιστώσει ότι, υποχρεωτικά, τουλάχιστον 2 από τους βόλους θα είναι σε μια και την αυτήν τσέπη. Επίσης, εάν τοποθετήσει 4 μικρά κουτιά στα 3 συρτάρια του γραφείου του, δεν υπάρχει τρόπος να βάλει το πολύ ένα κουτί σε κάθε ένα από τα συρτάρια: Είναι βέβαιο ότι σε ένα από τα συρτάρια θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 κουτιά. Αν διανείμει κανείς 5 παπαγάλους ή 5 κουνέλια σε 4 κλουβιά, θα παρατηρήσει ότι, υποχρεωτικά, κάποιο κλουβί θα περιέχει τουλάχιστον 2 παπαγάλους ή 2 κουνέλια.

Αυτές οι προφανείς παρατηρήσεις είναι στη βάση ενός θεμελιώδους κανόνα, μιας αρχής, η οποία δηλώνει: **εάν τα m αντικείμενα διανέμονται στις n ομάδες, όπου $m > n$, τότε τουλάχιστον δύο από τα αντικείμενα είναι σε μια και την αυτήν ομάδα.**

Ανάλογα με την χώρα, η αρχή αυτή έχει διαφορετικό όνομα. Παραδείγματος χάριν στη Γαλλία είναι γνωστή ως "αρχή των συρταριών", στην Αγγλία ως "αρχή του περιστερώννα", ενώ στη Βουλγαρία και τη Ρωσία ως "αρχή του Dirichlet". Στα Ελληνικά χρησιμοποιείται εξ ίσου η ορολογία "αρχή του περιστερώννα" ή "αρχή της περιστεροφωλιάς" ή "αρχή του Dirichlet". Η αρχή συνδέεται με το όνομα του μεγάλου γερμανικού μαθηματικού Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 - 1859) αν και ήταν γνωστή αρκετά νωρίτερα. Τα εύσημα στον Dirichlet δεν είναι για την ανακάλυψη της ανωτέρω τετριμμένης αρχής, αλλά στην εφαρμογή της για να λύσει πολυάριθμα ενδιαφέροντα προβλημάτων στην Θεωρία Αριθμών. Ο ίδιος ο Dirichlet δεν μοίραζε παπαγάλους ή τα κουνέλια σε κλουβιά και δεν έβαζε κουτιά στα συρτάρια του.

Χρησιμοποιώντας τη "γλώσσα των περιστερώννων", η αρχή Dirichlet εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός περιστερώννα με ορισμένες ιδιότητες. Κατά συνέπεια, είναι στην πραγματικότητα μια πρόταση για *ύπαρξη*. Η ίδια η αρχή δεν προτείνει αλγόριθμο για να βρεθεί ο περιστερώννας με τις επιθυμητές ιδιότητες και συνεπώς είναι μη-κατασκευαστικού χαρακτήρα. Είναι γεγονός ότι οι κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης είναι πιο φυσιολογικές στην καθημερινή ζωή και είναι πιο πειστικές. Φαίνεται ότι αυτό είναι και ο κύριος λόγος για τις απρόσμενες και πολυάριθμες εφαρμογές της αρχής Dirichlet. Τα ακόλουθα προβλήματα αφιερώνονται σε τέτοιες εφαρμογές.

Πρόβλημα 1. Υπάρχουν 367 μαθητές σε ένα σχολείο. Δείξτε ότι τουλάχιστον δύο από αυτούς έχουν επέτειο γενεθλίων την ίδια ημέρα.

Λύση: Θεωρήστε κάθε ημέρα του έτους ως ένα συρτάρι. Δεδομένου ότι υπάρχουν 365 ή 366 ημέρες σε ένα έτος, ανάλογα με εάν είναι ένα δίσεκτο ή όχι, συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των συρταριών είναι το πολύ-πολύ 366. Βάλτε κάθε μαθητή στο συρτάρι που αντιστοιχεί στα γενέθλιά του/της. Τώρα ο ισχυρισμός του προβλήματος προκύπτει άμεσα από την αρχή Dirichlet, αφού θα υπάρχει συρτάρι με (τουλάχιστον) δύο μαθητές.

Πρόβλημα 2. Από την ανατομία είναι γνωστό ότι το πλήθος όλων των τριχών στο κεφάλι ενός ανθρώπου είναι λιγότερο από 200.000. Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα στην Αθήνα με το ίδιο πλήθος από τρίχες στα κεφάλια τους.

Λύση: Θεωρήστε 200.000 συρτάρια, τα οποία απαριθμούνται από το 1 έως το 200.000. Βάζουμε κάθε Αθηναίο σε εκείνο το συρτάρι που έχει νούμερο τον ίδιο αριθμό με τον αριθμό των τριχών στο κεφάλι του/της. Δεδομένου ότι οι κάτοικοι της Αθήνας είναι περισσότεροι από τα συρτάρια, έπεται την αρχή του Dirichlet ότι

τουλάχιστον δύο κάτοικοι είναι σε ένα και το αυτό συρτάρι. Συνεπώς, έχουν τους ίδιους αριθμούς τριχών στα κεφάλια τους.

Πρόβλημα 3. Ένας μαθητής πρέπει να λύσει 9 προβλήματα σε μια εβδομάδα. Εξηγήστε γιατί τουλάχιστον μια ημέρα της εβδομάδας αυτής ο μαθητής πρέπει να λύσει περισσότερα από 2 προβλήματα.

Λύση: Βαφτίζουμε κάποια συρτάρια με τα ονόματα των ημερών της εβδομάδας. Ο συνολικός αριθμός συρταριών είναι 7. Βάζουμε στο κάθε συρτάρι το πρόβλημα που πρέπει έχει λύσει ο μαθητής κατά τη διάρκεια της ημέρας που αντιστοιχεί στο όνομα του συρταριού. Τα υπόλοιπα έπονται τώρα από την αρχή του Dirichlet.

Πρόβλημα 4. Δίνεται ένα 5×5 τετράγωνο, το οποίο διαιρείται σε 25 μοναδιαία τετράγωνα. Τοποθετούμε τυχαία 26 σημεία στο τετράγωνο. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον 2 σημεία θα βρίσκονται στο ίδιο μοναδιαίο τετράγωνο.

Λύση: Τα τετράγωνα χρησιμεύουν ως τα συρτάρια. Εάν σε κάθε συρτάρι υπάρχει το πολύ ένα σημείο, τότε το πλήθος των σημείων θα ήταν 25 το πολύ. Αλλά τα σημεία είναι 26 και $26 > 25$. Κατά συνέπεια έπεται ο ισχυρισμός, από την αρχή του Dirichlet.

Πρόβλημα 5. Δίνονται 4 φυσικοί αριθμοί. Δείξτε ότι τουλάχιστον 2 αυτούς αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο μόντουλο 3.

Λύση: Τα δυνατά υπόλοιπα μόντουλο 3 είναι 0, 1 και 2. Εξετάζουμε 3 συρτάρια αντιστοιχούν σε διαφορετικά υπόλοιπα. Βάζουμε τους 4 φυσικούς αριθμούς στα συρτάρια που αντιστοιχούν στα υπόλοιπά τους. Τώρα έπεται ο ισχυρισμός από την αρχή του Dirichlet.

Πρόβλημα 6. Δίνονται 5 φυσικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον μια από τις διαφορές μεταξύ τους είναι πολλαπλάσιο του 4.

Λύση: Τα δυνατά υπόλοιπα μόντουλο 4 είναι 0, 1, 2 και 3. Όπως στο προηγούμενο πρόβλημα εξετάζουμε 4 συρτάρια που αντιστοιχούν στα διαφορετικά υπόλοιπα. Από την αρχή του Dirichlet τουλάχιστον 2 αριθμοί περιέχονται σε ένα και το αυτό συρτάρι. Δεδομένου ότι το υπόλοιπα αυτά είναι ίσα μόντουλο 4, η διαφορά των αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4.

Γενικότερα, αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. Εάν n φυσικός αριθμός, τότε μεταξύ οποιωνδήποτε $n + 1$ φυσικών αριθμών υπάρχουν δύο των οποίων η διαφορά είναι πολλαπλάσιο του n .

Πρόβλημα 7. Έστω a , b και c ακέραιοι αριθμοί. Δείξτε ότι το γινόμενο

$$abc(a+b+c)(b+a)(c+a)(c+b)$$

είναι πολλαπλάσιο του 6.

Λύση: Οι τελευταίοι παράγοντες του υπό εξέταση γινομένου διαμορφώνονται από όλα τα δυνατά ζεύγη των τριών ακεραίων αριθμών. Τουλάχιστον δύο από τους τρεις δοθέντες αριθμούς έχουν το ίδιο ισοϋπόλοιπο και επομένως ένας από τους παράγοντες είναι άρτιος. Μένει να αποδείξουμε ότι το υπό εξέταση γινόμενο είναι πολλαπλάσιο του 3. Αν ένας από τους a , b , c είναι πολλαπλάσιο του 3, τελειώσαμε, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι κανένας δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Υποθέτουμε δηλαδή ότι όλοι αφήνουν υπόλοιπα 1 ή 2 μόντουλο 3. Αν και οι τρεις αφήνουν υπόλοιπο 1 ή και οι τρεις υπόλοιπο 2 μόντουλο 3, τότε ο $a + b + c$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε πάλι τελειώσαμε. Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση που κάποιος αφήνει υπόλοιπο 1 και κάποιος άλλος 2. Αλλά τότε το άθροισμα τους θα είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε τελειώσαμε και σε αυτή την περίπτωση.

Πρόβλημα 8. Έξι συμμαθητές έγραψαν στο πίνακα από έναν φυσικό αριθμό (το 0 θεωρείται φυσικός αριθμός). Δείξτε ότι αν το άθροισμα των αριθμών που έγραψαν είναι 14, τότε τουλάχιστον δύο από αυτούς έγραψαν τον ίδιο αριθμό.

Λύση: Βάζουμε όλους τους μαθητές που έγραψαν τον 0 σε ένα συρτάρι με ετικέτα 0. Βάζουμε όλους τους μαθητές που έγραψαν τον 1 σε ένα συρτάρι με ετικέτα 1, και ούτω καθ' εξής, βάζουμε όλους τους μαθητές που έγραψαν τον 14 σε ένα συρτάρι με ετικέτα 14. Εάν οι έξι μαθητές πέσουν σε 6 διαφορετικά συρτάρια, τότε το άθροισμα των αριθμών θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το εν λόγω άθροισμα είναι ίσο με 14. Συνεπώς, τουλάχιστον δύο συμμαθητές έχουν επιλέξει τον ίδιο αριθμό.

Πρόβλημα 9. Επτά άτομα βρίσκονται κάποια στιγμή συγχρόνως σε ένα κατάστημα. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον δύο από αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό γνωριμιών μεταξύ των άλλων.

Λύση: Στην πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι γνωριμίες είναι συμμετρική ιδιότητα. Δηλαδή αν ο Α γνωρίζει τον Β, τότε και ο Β γνωρίζει τον Α. Κάθε ένα από τα άτομα έχει 0, 1, 2, 3, 4, 5 ή 6 γνωριμίες μεταξύ των άλλων στο κατάστημα. Αλλά εάν υπάρχει άτομο με 0 γνωριμίες, δηλαδή αν υπάρχει άτομο που δεν γνωρίζει κανέναν μεταξύ των άλλων τότε, λόγω συμμετρίας, δεν θα υπάρχει κανένας με 6 γνωριμίες στο κατάστημα. Τοποθετούμε τώρα τα άτομα σε συρτάρια αριθμημένα ως 0, 1, 2, 3, 4, 5, και 6 ανάλογα με το πλήθος των γνωριμιών του καθενός. Δύο περιπτώσεις είναι δυνατές. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν άτομα στο συρτάρι 0. Αλλά τότε τα άτομα θα βρίσκονται σε 6 συρτάρια, τα 0, 1, 2, 3, 4 και 5 (όχι στο 6). Στη δεύτερη περίπτωση δεν υπάρχουν άτομα στο συρτάρι 0. Τότε όμως τα άτομα βρίσκονται στα 1, 2, 3, 4, 5 και 6. Και στις δύο περιπτώσεις τα συρτάρια είναι 6, ενώ ο αριθμός των ατόμων στο κατάστημα είναι 7. Κατά συνέπεια, έπεται η απάντηση από την αρχή του Dirichlet.

Στο προηγούμενο πρόβλημα δεχθήκαμε ότι οι γνωριμίες είναι αμοιβαίες. Εφαρμόζοντας την ιδέα της λύσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι στην Αθήνα (ή σε οποιοδήποτε άλλη πόλη του κόσμου) υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα με το ίδιο πλήθος γνωριμιών μεταξύ των άλλων κατοίκων της Αθήνας. Γενικότερα, σε κάθε ομάδα n ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον δύο με τον ίδιο αριθμό γνωριμιών μεταξύ άλλων στην ομάδα.

Πρόβλημα 10. Δίνονται πενήντα σημεία μέσα σε ένα τετράγωνο πλευράς 7 cm. Δείξτε ότι τουλάχιστον 2 από τα σημεία μπορούν να καλυφθούν από ένα τετράγωνο πλευράς 1 cm.

Λύση: Διαιρούμε το αρχικό τετράγωνο σε 49 μικρά τετράγωνα πλευράς 1 cm, όπως σε μια σκακιέρα. Όπως στο Πρόβλημα 4, υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία μέσα σε ένα από τα μικρά τετράγωνα πλευράς 1 cm. Ένα τέτοιο τετράγωνο καλύπτει τα 2 σημεία.

Πρόβλημα 11. Εκατόν ένα σημεία είναι τοποθετημένα σε ένα τετράγωνο πλευράς 10 cm. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 από τα των οποίων η απόσταση μεταξύ τους είναι μικρότερη από 2 cm.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα πιο απομακρυσμένα σημεία ενός τετραγώνου είναι οι κορυφές στα άκρα μιας διαγωνίου του. Τώρα, δύο τέτοιες κορυφές μαζί με μία τρίτη σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με δύο πλευρές ίσες προς την πλευρά του τετραγώνου. Συνεπώς, το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου είναι μικρότερο από το διπλάσιο του μήκους της πλευράς του τετραγώνου¹. Δεδομένου ότι τα άκρα της διαγωνίου είναι τα πιο απομακρυσμένα σημεία του τετραγώνου, έπεται

¹ Η ακριβής τιμή είναι « $\sqrt{2}$ φορές» η πλευρά, αλλά η εκτίμηση «2 φορές» επαρκεί για το πρόβλημα.

ότι η απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε 2 σημείων του τετραγώνου είναι επίσης μικρότερη από το διπλάσιο του μήκους της πλευράς του τετραγώνου. Τώρα, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα διαιρούμε το δεδομένο τετράγωνο σε 100 μικρότερα τετράγωνα πλευράς 1 cm. Θεωρούμε τα 100 αυτά μικρότερα τετράγωνα ως συρτάρια. Από την αρχή του Dirichlet συμπεραίνουμε ότι τουλάχιστον 2 από τα περιέχονται σε ένα από τα. Όπως έχει παρατηρηθεί ήδη, η απόσταση μεταξύ αυτών των δύο σημείων θα είναι μικρότερη από το διπλάσιο της πλευράς του μικρού τετραγώνου, δηλαδή θα είναι λιγότερο από 2 cm.

Πρόβλημα 12. Δίνονται 7 σημεία σε ένα 4x4 τετράγωνο που απαρτίζεται από 16 μοναδιαία τετράγωνα. Δείξτε ότι είτε υπάρχουν 4 μοναδιαία τετράγωνα τα οποία περιέχουν τουλάχιστον 3 από τα σημεία ή υπάρχουν 12 μοναδιαία τετράγωνα τα οποία σχηματίζουν 3 τετράγωνα το καθένα από τα οποία αποτελείται από 4 μοναδιαία τετράγωνα και τα οποία περιέχουν από ακριβώς 2 σημεία.

Λύση: Διαιρούμε το αρχικό τετράγωνο σε 4 τετράγωνα διαστάσεων 2×2 . Αυτά τα 4 τετράγωνα θα είναι τα συρτάρια μας. Σύμφωνα με την αρχή του Dirichlet τουλάχιστον ένα από τα συρτάρια περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία. Εάν τα σημεία είναι περισσότερα από 2, τελειώσαμε. Έστω, λοιπόν, ότι το πλήθος των εν λόγω σημείων είναι ακριβώς 2. Τα υπόλοιπα 5 σημεία θα βρίσκονται στα άλλα 3 τετράγωνα διαστάσεων 2×2 . Σύμφωνα με την αρχή του Dirichlet, πάλι, ένα από αυτά θα περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία. Εάν τα σημεία είναι περισσότερα από 2, τελειώσαμε, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σημεία είναι ακριβώς 2. Με άλλα λόγια, δύο τετράγωνα διαστάσεων 2×2 περιέχουν το καθένα από 2 σημεία. Τα υπόλοιπα 3 σημεία βρίσκονται σε 2 τετράγωνα διαστάσεων 2×2 . Εφαρμόζουμε την αρχή του Dirichlet για τρίτη φορά. Έπεται ότι ένα από τα τετράγωνα περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία. Εάν τα σημεία 3 ή παραπάνω, τελειώσαμε, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σημεία είναι ακριβώς 2. Αλλά τότε βρήκαμε τρίτο τετράγωνο διαστάσεων 2×2 με ακριβώς 2 από τα σημεία μέσα του.

Πρόβλημα 13. Δίνεται ένα 3×3 τετράγωνο το οποίο απαρτίζεται από 9 μοναδιαία τετράγωνα. Σε κάθε ένα από τα μοναδιαία τετράγωνα γράφουμε ένα από τους αριθμούς -1, 0 ή 1. Δείξτε ότι μεταξύ των αθροισμάτων των γραμμών ή των στηλών ή των διαγωνίων, υπάρχουν δύο ίσα.

Λύση: Υπάρχουν 3 γραμμές, 3 στήλες και 2 διαγώνιες, σύνολο 8. Από την άλλη, όλα τα δυνατά αθροίσματα είναι 7, τα -3, -2, -1, 0, 1, 2 ή 3. Εξετάζουμε 7 συρτάρια που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα 7 αθροίσματα. Από την αρχή του Dirichlet, τουλάχιστον 2 από τα 8 αθροίσματα θα είναι ίσα.

Πρόβλημα 14. Ένα λαίμαργο ποντίκι έφαγε 10 καραμέλες από ένα κουτί που περιείχε τριών ειδών καραμέλες. Βρείτε την μέγιστη δυνατή τιμή n για την οποία είναι απολύτως βέβαιο ότι το ποντίκι έφαγε τουλάχιστον n καραμέλες του ίδιου είδους.

Λύση: Εάν το ποντίκι έφαγε το πολύ 3 καραμέλες του ίδιου είδους, τότε το συνολικό πλήθος των καραμελών που έφαγε θα ήταν το πολύ $3 \times 3 = 9$. Αυτό είναι αντίφαση επειδή $9 < 10$. Συνεπώς $n > 3$ και η μικρότερη πιθανή τιμή είναι $n = 4$. Τα συρτάρια είναι σε αυτήν την περίπτωση τα διαφορετικά είδη γλυκών, που είναι 3 τον αριθμό. Βάζοντας 10 καραμέλες σε 3 συρτάρια καταλήγουμε ότι τουλάχιστον ένα συρτάρι θα έχει τουλάχιστον 4 καραμέλες.

Στη λύση του τελευταίου προβλήματος χρησιμοποιείται την ακόλουθη γενικότερη μορφή της αρχής Dirichlet: **εάν m αντικείμενα διανέμονται στις n ομάδες και $m > nk$, όπου το k είναι φυσικός αριθμός, τότε υπάρχει ομάδα με τουλάχιστον $k + 1$ αντικείμενα.**

Για τη χάρη της πληρότητας θα αποδείξουμε αυτήν την γενικότερη μορφή της αρχής Dirichlet. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Είναι επίσης διδακτική επειδή χρησιμοποιεί ένα επιχείρημα αντίφασης, το οποίο εμφανίζεται συχνά. Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν το πολύ k αντικείμενα κάθε ομάδα. Τότε, το πλήθος όλων των αντικειμένων θα ήταν το πολύ nk , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι τα αντικείμενα είναι περισσότερα από nk . Τελειώσαμε! Παρατηρήστε μια δεύτερη διδακτική λεπτομέρεια. Σχετίζεται με τον ακριβή προσδιορισμό του αριθμού k : Διαιρούμε το πλήθος m των αντικειμένων θεμάτων με το πλήθος n των ομάδων. Στις περισσότερες περιπτώσεις το πηλίκο είναι κλάσμα, αλλά αρκεί να ληφθεί ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι μεγαλύτερος από το πηλίκο. Ο αριθμός k είναι ίσος με αυτόν τον μικρότερο αριθμό. Παραδείγματος χάριν, εάν 7 κουνέλια διανέμονταν σε 3 κλουβιά, διαιρούμε το 7 δια 3 για να λάβουμε $\frac{7}{3}$. Ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι μεγαλύτερος

από $\frac{7}{3}$ είναι ίσος με 3. Σε αυτήν την περίπτωση η αρχή Dirichlet εξασφαλίζει ότι υπάρχουν τουλάχιστον 3 κουνέλια κάποιο από τα κλουβιά.

Πρόβλημα 15. Σε μία τάξη υπάρχουν 25 μαθητές. Δείξτε ότι τουλάχιστον 3 μαθητές έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα.

Λύση: Εξετάστε 12 συρτάρια, δηλαδή όσα και οι μήνες. Βάλτε τους μαθητές στα συρτάρια που αναλογούν στον μήνα γέννησής τους. Αφού $m = 25 > 12 \times 2$, έπεται από την (γενικευμένη) αρχή του Dirichlet ότι υπάρχουν τουλάχιστον $2 + 1 = 3$ μαθητές στο ένα από τα συρτάρια (σε αυτήν την περίπτωση $n = 12$ και $k = 2$).

Πρόβλημα 16. Σαράντα μαθητές ανταγωνίστηκαν σε 6 προβλήματα μιας μαθηματικής ολυμπιάδας. Δείξτε ότι τουλάχιστον 6 από τους μαθητές έλυσαν ακριβώς το ίδιο πλήθος προβλημάτων.

Λύση: Εξετάστε 7 συρτάρια. Βάλτε στο πρώτο συρτάρι τους μαθητές που δεν έλυσαν κανένα πρόβλημα, βάλτε στο δεύτερο εκείνους που έλυσαν 1, στο τρίτο όσους έλυσαν 2, και τα λοιπά, μέχρι το έβδομο συρτάρι εκείνους που έλυσαν 6 προβλήματα. Έχουμε $m = 40 > 7 \cdot 5 = 35$ και έπεται από την αρχή του Dirichlet ότι τουλάχιστον 6 μαθητές περιέρχονται σε ένα από τα συρτάρια.

Πρόβλημα 17. Έστω 6 σπίτια τα οποία συνδέονται ανά δύο με έναν δρόμο ο οποίος είτε είναι ασφαλτοστρωμένος είτε είναι χωματόδρομος. Δείξτε ότι τουλάχιστον 3 σπίτια συνδέονται το ένα με το άλλο με δρόμους του ίδιου είδους (είτε όλοι ασφαλτοστρωμένοι είτε όλοι χωματόδρομοι).

Λύση: Συμβολίζουμε τα σπίτια με τα γράμματα A, B, C, D, E και F . Από το A ξεκινούν 5 δρόμοι οπότε, από την αρχή του Dirichlet, υπάρχουν τουλάχιστον 3 του ίδιου είδους, παραδείγματος χάριν ασφαλτοστρωμένοι. Έστω ότι οι ασφαλτοστρωμένοι αυτοί δρόμοι είναι μεταξύ του A και B , του A και C , και του A και D . Εξετάζουμε τώρα τον δρόμο μεταξύ των B και C . Αν είναι ασφαλτοστρωμένος, τότε οι δρόμοι που συνδέουν τα A, B και C είναι όλοι ασφαλτοστρωμένοι, και τελειώσαμε. Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο δρόμος των B και C είναι χωματόδρομος. Ανάλογα μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι δρόμοι που συνδέουν τα B και D καθώς και τα C και D είναι χωματόδρομοι. Αλλά τότε B, C και D συνδέονται μεταξύ τους με χωματόδρομους, οπότε τελειώσαμε και πάλι.

Μια ισοδύναμη μορφή του ανωτέρω προβλήματος είναι η ακόλουθη: Δίνονται 6 σημεία στο επίπεδο σε γενική θέση (δηλαδή κάθε τρία από τα σημεία δεν είναι συνευθειακά). Τα έξι ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σημεία είναι χρωματισμένα, το καθένα, είτε με μπλε χρώμα είτε με κόκκινο. Δείξτε ότι υπάρχει μονοχρωματικό τρίγωνο με κορυφές μεταξύ των δεδομένων σημείων (δηλαδή

υπάρχει τρίγωνο με κορυφές τρία από τα σημεία, του οποίου οι πλευρές έχουν όλες το ίδιο χρώμα)

Πρόβλημα 18. Δίνονται 17 σημεία στο επίπεδο, σε γενική θέση. Τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σημεία είναι χρωματισμένα μπλε, κόκκινα ή πράσινα. Δείξτε ότι υπάρχει μονοχρωματικό τρίγωνο με κορυφές μεταξύ των δεδομένων σημείων.

Λύση: Θεωρούμε ένα από τα σημεία, το οποίο συμβολίζουμε με A , και εξετάζουμε τα 16 τμήματα που αρχίζουν από το A . Από την αρχή του Dirichlet τουλάχιστον 6 από αυτά, έχουν το ίδιο χρώμα, παραδείγματος χάριν μπλε (εάν υπήρχαν το πολύ 5 τμήματα από κάθε χρώμα, τότε τα τμήματα θα ήσαν το πολύ $3 \times 5 = 15$ και όχι 16 που υποθέσαμε). Κατόπιν εξετάζουμε τα 6 άκρα, διαφορετικά από το A , των 6 αυτών τμημάτων. Εάν ένα από τα τμήματα που τα συνδέουν είναι μπλε, παραδείγματος χάριν μεταξύ των σημείων B και C , τότε το τρίγωνο ABC είναι μπλε και τελειώσαμε. Εξετάζουμε λοιπόν την περίπτωση όταν όλα τα τμήματα που συνδέουν τα 6 σημεία είναι κόκκινα ή πράσινα. Αυτό είναι η υπόθεση του προηγούμενου προβλήματος και η ύπαρξη μονοχρωματικού τριγώνου έχει αποδειχθεί.

Πρόβλημα 19. Σε ένα παρτέρι από γκαζόν ορθογωνίου σχήματος διαστάσεων 3 m x 2 m κάθονται 193 κουνούπια. Είναι δυνατόν να σκοτώσει κανείς τουλάχιστον 3 κουνούπια ταυτόχρονα με έναν μυγοσκοτώστρα διαστάσεων 25 cm x 25 cm;

Λύση: Η απάντηση είναι θετική. Είναι αρκετό να διαιρέσει κανείς το έδαφος σε 96 τετράγωνα διαστάσεων 25 cm x 25 cm. Η αρχή Dirichlet δείχνει ότι υπάρχει τετράγωνο στο οποίο κάθονται τουλάχιστον 3 κουνούπια. Πρέπει τώρα κανείς να σμαδέψει αυτό ακριβώς το τετράγωνο.

Πρόβλημα 20. Δίνονται 802 σημεία σε ένα τετράγωνο πλευράς 20 cm. Δείξτε ότι είτε υπάρχει τετράγωνο πλευράς 1 cm το οποίο περιέχει τουλάχιστον 4 από τα σημεία είτε υπάρχουν 2 τετράγωνα πλευράς 1 cm τα οποία περιέχουν, το καθένα, τουλάχιστον 3 από τα σημεία.

Λύση: Σε αυτήν την περίπτωση τα συρτάρια είναι τα 400 μοναδιαία τετράγωνα μονάδων στα οποία μπορεί να διαιρεθεί το δεδομένο τετράγωνο. Έπεται από την αρχή του Dirichlet ότι κάποιο από αυτά περιέχει τουλάχιστον 3 σημεία. Εάν τα σημεία είναι περισσότερα από 3, τελειώσαμε. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι τα σημεία είναι ακριβώς τρία. Συνεπώς τα υπόλοιπα 799 σημεία θα είναι τοποθετημένα στα άλλα 399 μοναδιαία τετράγωνα. Πάλι από την αρχή του Dirichlet συμπεραίνουμε ότι κάποιο από τα 399 τετράγωνα θα περιέχει τουλάχιστον 3 σημεία. Εάν τα σημεία είναι περισσότερα από 3, τελειώσαμε και πάλι. Διαφορετικά τα σημεία είναι 3 ακριβώς. Αλλά τότε λαμβάνουμε ένα δεύτερο τετράγωνο πλευράς 1 cm, που περιέχει 3 σημεία.

Είναι σαφές από τα εξεταζόμενα προβλήματα ότι ένα βασικό στοιχείο στις λύσεις τους είναι ο προσδιορισμός των συρταριών. Η εφαρμογή της αρχής του Dirichlet δίνει τότε την δυνατότητα να αξιολογηθεί η κατανομή των "αντικειμένων" στα συρτάρια. Υπάρχει μια άλλη κατηγορία προβλημάτων που θα μπορούσε να λυθεί με έναν συλλογισμό που μοιάζει με την αρχή Dirichlet. Πάλι χρησιμοποιούνται "συρτάρια" για την λύση τους, αλλά αυτή τη φορά τα συρτάρια έχουν περιορισμένο χώρο, δηλαδή χωρούν μόνο έναν περιορισμένο αριθμό αντικειμένων. Αντίθετα από την αρχή του Dirichlet, οι εκτιμήσεις τώρα δεν αφορούν την κατανομή των αντικειμένων, αλλά το πλήθος των γεμάτων συρταριών. Ας δούμε μερικά προβλήματα αυτού του είδους.

Πρόβλημα 21. Σε μία τάξη υπάρχουν 15 θρανία των δύο θέσεων το καθένα, και οι μαθητές της τάξης είναι 22. Δείξτε ότι σε τουλάχιστον 7 θρανία κάθονται από δύο μαθητές.

Λύση: Τα συρτάρια είναι τα θρανία. Στην περίπτωση αυτή τα συρτάρια έχουν περιορισμένο χώρο δεδομένου ότι επιτρέπονται το πολύ 2 μαθητές στο κάθε θρανίο. Εάν κάθε θρανίο καταλαμβάνεται από έναν μόνο μαθητή τότε θα περισσεύουν 7 μαθητές ($22 - 15 = 7$). Για να κάτσουν και αυτοί, χρειάζονται 7 θρανία. Κατά συνέπεια 7 θρανία θα έχουν από δύο μαθητές.

Πρόβλημα 22. Οι 9 από τις κορυφές ενός κανονικού 20-γώνου είναι χρωματισμένες κόκκινες ενώ οι υπόλοιπες 11 είναι χρωματισμένες μπλε. Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 μπλε κορυφές οι οποίες είναι αντιδιαμετρικές.

Λύση: Τα συρτάρια θα είναι οι διάμετροι του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού 20-γώνου. Κάθε διάμετρος συνδέει 2 αντιδιαμετρικές κορυφές. Όλα τα συρτάρια είναι περιορισμένα - κάθε ένα περιέχει 2 σημεία το πολύ, που είναι τα άκρα της αντίστοιχης διαμέτρου. Το πλήθος των συρταριών (διαμέτρων) είναι 10. Εξετάζουμε τα συρτάρια που περιέχουν τουλάχιστον μία κόκκινη κορυφή. Το πλήθος τους είναι 9 το πολύ. Δεδομένου ότι όλα τα συρτάρια είναι 10, έπεται ότι υπάρχει συρτάρι χωρίς κόκκινη κορυφή μέσα του. Τα άκρα της αντίστοιχης διαμέτρου είναι, λοιπόν, μπλε και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Πρόβλημα 23. Να βρεθεί η τιμή του ακόλουθου κλάσματος εάν τα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά ψηφία:

$$\frac{D \times I \times R \times I \times C \times H \times L \times E \times T}{P \times R \times I \times N \times C \times I \times P \times L \times E}.$$

Λύση: Τα 10 δυνατά ψηφία είναι συρτάρια που είναι περιορισμένα: το πολύ ένα γράμμα πρέπει να τεθεί σε κάθε. Δεδομένου ότι τα διαφορετικά γράμματα στο κλάσμα είναι 10, έπεται ότι σε κάποιο από αυτά αντιστοιχεί στο μηδέν. Όμως το ψηφίο μηδέν δεν μπορεί να εμφανιστεί στον παρονομαστή, πράγμα που σημαίνει ότι εμφανίζεται στον αριθμητή, και έτσι η τιμή του κλάσματος είναι ίση με 0.